

# Quantenkorrelationen und die Bellschen Ungleichungen

Von der Grundlagenforschung zur technologischen Anwendung

Gernot Alber und Matthias Freyberger

**Seit der Geburt der modernen Quantenmechanik macht jede Generation von Physikern aufs Neue eine befremdende und faszinierende Erfahrung: Ihre an der klassischen, makroskopischen Erfahrungswelt geschulte Intuition prallt auf erstaunliche Voraussagen quantenphysikalischer Gesetzmäßigkeiten. Im Zentrum dieses Staunens stehen die nichtlokalen Korrelationen quantenmechanischer Teilchen. Keine klassische Theorie scheint in der Lage zu sein, diese Korrelationen korrekt zu modellieren. Woran liegt das und wo stehen wir heute am Ende des Jahrhunderts der Quantenmechanik?**

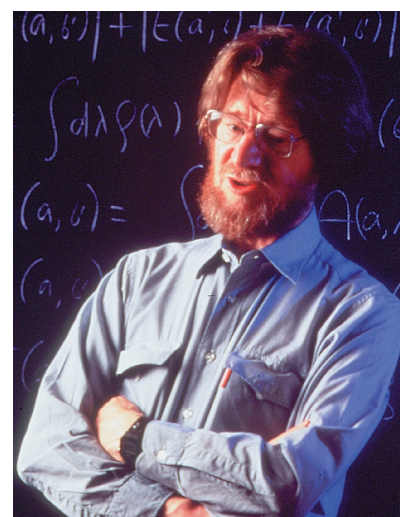
Die Zustandsbeschreibungen der klassischen Mechanik auf der einen Seite und der Quantenmechanik auf der anderen Seite sind vollkommen verschieden. Klassisch ist der Zustand eines Systems vollständig festgelegt, sobald Orts- und Impulskoordinaten aller beteiligten Teilchen bekannt sind. Durch den Zustand des Gesamtsystems ist das Ergebnis einer Orts- und Impulsmessung an einem einzelnen Teilchen eindeutig festgelegt und unabhängig von den Messungen, die an den übrigen Teilchen durchgeführt werden. Das ist der typische lokale Charakter der klassischen Physik.

Die Quantentheorie stellt dieses Bild radikal in Frage. Der Zustandsbegriff ist ein völlig anderer. Die Gesamtinformation über ein Quantensystem wird durch einen Zustandsvektor  $|\psi\rangle$  beschrieben, dessen Eigenschaften durch die mathematische Struktur des Hilbert-Raumes bestimmt werden. Insbesondere können charakteristische Eigenschaften des Quantenzustandes eines Gesamtsystems zwischen zwei oder mehreren Subsystemen *verschränkt* sein (siehe dazu Kasten 1), wobei keines der einzelnen Subsysteme jeweils für sich alleine diese Charakteristika aufweist. Folglich reichen lokale Messungen an den Subsystemen nicht aus, um den quantenmechanischen Gesamtzustand zu rekonstruieren. Das Ergebnis einer Messung an einem Subsystem hängt entscheidend davon ab, welche Größe an den anderen Subsystemen beobachtet wird. Erst mit diesen nichtlokalen Korrelationen ergibt sich eine quantenmechanisch vollständige Beschreibung des Gesamtsystems: „Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.“

Sind diese auf rätselhafte Weise verwobenen Quantenzustände nur ein seltsamer Zug einer Theorie, der

auf mikroskopische Distanzen beschränkt ist? Neue Experimente in Genf [1] und Innsbruck [2] untermauern nicht nur die ungewöhnlichen Korrelationen verschränkter Quantenzustände, sondern belegen auch in eindrucksvoller Weise, daß die damit verbundenen Quantenphänomene über makroskopische Distanzen ( $> 10$  km) auftreten können. Neben der großen Bedeutung dieser Ergebnisse für die Grundlagenforschung eröffnen sich damit zugleich interessante Perspektiven für ungewöhnliche neue Anwendungen im Rahmen der Quanteninformationsverarbeitung. Die rätselhaften Züge der Quantenmechanik lassen sich vorteilhaft für technologische Anwendungen nutzen. Das Potential möglicher Anwendungen reicht von der Quantenkryptographie über Quantenteleportation bis hin zum Quantencomputer.

Die Geschichte der mit verschränkten Quantenzuständen zusammenhängenden Fragen, die die Physiker immer wieder bewegt haben, läßt sich bis ins Jahr 1935 zurückverfolgen, als Schrödinger den Begriff der Verschränkung prägte [3] und Einstein, Podolsky und Rosen (EPR) das später nach ihnen benannte Gedankenexperiment formulierten. Das EPR-Gedankenexperiment brachte die bizarr anmutenden Vorhersagen der Quantenmechanik auf den Punkt: Entweder, so die Schlußfolgerung, die Quantenmechanik ist nichtlokal, oder sie ist unvollständig. Nichtlokal heißt hier, daß die Messung an einem Teilchen die Messung an einem anderen Teilchen unmittelbar beeinflussen kann, auch wenn beide weit voneinander entfernt sind. Mit der Nichtlokalität verschränkter Systeme konnten sich Einstein, Podolsky und Rosen nicht anfreunden, daher schlossen sie auf die Unvollständigkeit der Quantenmechanik [4]. Die kreative Unruhe, die von dieser Schlußfolgerung ausging, führte schließlich 1964 John Bell zu einer bahnbrechenden Entdeckung. Er versuchte die vermeintliche Unvollständigkeit der Quantenmechanik durch noch unbekannte, „verborgene“ Para-



**John Bell versuchte die Quantenmechanik durch verborgene Parameter zu ergänzen, um wieder zu einer lokalen und deterministischen Naturbeschreibung zurückzukehren. Dabei entdeckte er die später nach ihm benannten Ungleichungen. Sie erlauben es, die von der Quantenmechanik implizierte Nichtlokalität experimentell zu überprüfen. Mit raffinierten Experimenten könnten schon bald die letzten Schlupflöcher für lokale Theorien geschlossen werden. (Foto: CERN)**

Priv.-Doz. Dr. Gernot Alber und Priv.-Doz. Dr. Matthias Freyberger, Abteilung für Quantenphysik, Universität Ulm, D-89069 Ulm

meter im Rahmen einer lokalen und kausalen Theorie zu ergänzen (siehe dazu Kasten 2). Dabei entdeckte er, daß verschränkte Quantenzustände zu statistischen Vorhersagen führen, die niemals mit Vorhersagen von solchen lokalen und kausalen Theorien in Einklang zu bringen sind. Die quantitative Fassung dieses entscheidenden Ergebnisses sind die Bellschen Ungleichungen [5]. Damit war der Weg offen, die grundlegenden Unterschiede zwischen der Quantenmechanik und einer

### Kasten 1 – Verschränkte Quantenzustände

Der Begriff der Verschränkung zwischen Quantensystemen läßt sich in einfachster Weise an einem Quantensystem erläutern, das nur aus zwei Subsystemen (Teilchen) besteht. Ein verschränkter Quantenzustand zweier Quantensysteme besitzt die charakteristische Eigenschaft, daß er sich nicht faktorisieren läßt. Betrachten wir als Beispiel zwei Photonen mit den orthogonalen Einteilchenzuständen  $|+1\rangle$  und  $|-1\rangle$ , die sich in dem verschränkten Bell-Zustand

$$|\psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|+1\rangle|-1\rangle - |-1\rangle|+1\rangle) \quad (1)$$

befinden. Dieser Zustand ist verschränkt, da er sich *nicht* als Produkt

$$|\psi\rangle = |\mu\rangle|v\rangle.$$

schreiben läßt. Dies wird klar, wenn wir die Zustände  $|\mu\rangle$  und  $|v\rangle$  in der Basis der orthogonalen Photonenzustände entwickeln und die Bedingungen für Faktorisierbarkeit explizit untersuchen. Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} |\mu\rangle &= C_{+1}|+1\rangle + C_{-1}|-1\rangle, \\ |v\rangle &= D_{+1}|+1\rangle + D_{-1}|-1\rangle \end{aligned}$$

gilt für einen faktorierbaren Zustand

$$\begin{aligned} |\mu\rangle|v\rangle &= \\ C_{+1}D_{+1}|+1\rangle|+1\rangle + C_{-1}D_{-1}|-1\rangle|-1\rangle + \\ C_{+1}D_{-1}|+1\rangle|-1\rangle + C_{-1}D_{+1}|-1\rangle|+1\rangle. \end{aligned}$$

Wenn der Zustand (1) faktorierbar wäre, müßte er folgende Beziehungen erfüllen:

$$\begin{aligned} C_{+1}D_{+1} &= 0 & , & \quad C_{-1}D_{-1} = 0, \\ C_{+1}D_{-1} &= 1/\sqrt{2} & , & \quad C_{-1}D_{+1} = -1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Man erkennt leicht, daß sich diese Beziehungen nicht gleichzeitig erfüllen lassen. Der Quantenzustand (1) ist somit nicht faktorierbar, also verschränkt. Eine Messung des ersten Teilchens legt den Polarisationszustand des zweiten Teilchens fest. Falls eine Messung der Polarisierung des ersten Teilchens das Resultat (+1) ergibt, befindet sich das zweite Teilchen im Zustand  $|-1\rangle$  und umgekehrt.

lokalen, kausalen Theorie experimentell zu überprüfen. Als Bell seine Ungleichungen aufstellte, waren die Möglichkeiten experimenteller Tests freilich noch relativ bescheiden. Erst ab den achtziger Jahren verfügte man über ausreichende Präzision. Bevor wir im Abschnitt „Experimentelle Tests“ auf die Ergebnisse dieser Experimente eingehen, skizzieren wir im folgenden Exkurs die Herleitung der Bellschen Ungleichungen.

### Die Bellschen Ungleichungen

Um die wesentliche Aussage der Bellschen Ungleichungen genauer zu verstehen, betrachten wir ein Photonenpaar, das in einem atomaren Zwei-Photonen-Zerfallsprozeß oder in einem nichtlinearen optischen Prozeß entsteht (siehe dazu Abb. 1). Jedes einzelne dieser Photonen werde von räumlich getrennten Beobachtern A und B mit Polarisatoren auf Polarisierungseigenschaften hin untersucht. Außerdem wollen wir annehmen, daß die Beobachter A und B ihre Polarisatoren zufällig zwischen zwei Richtungen mit Einheitsvektoren  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  bzw.  $\vec{\beta}_1$  und  $\vec{\beta}_2$  hin und her schalten. Für jede Orientierung der Polarisatoren sind nur zwei Ergebnisse möglich: horizontal zum jeweils gewählten Einheitsvektor polarisiert (kodiert durch +1) oder vertikal polarisiert (kodiert durch -1). Die Meßergebnisse werden folglich durch eine zweiwertige (dichotome) Variable beschrieben.

Wir wollen nun untersuchen, welche Einschränkungen sich für die Korrelationen der Meßergebnisse von A und B ergeben, wenn wir annehmen, daß diese Meßergebnisse durch eine lokale realistische Theorie (LRT) mit verborgenen Parametern unbekannter Natur bestimmt werden (siehe dazu Kasten 2). Ein wichtiger

Punkt ist hierbei, daß man zu konkreten Aussagen gelangen kann, obwohl über die Theorie selbst wenige Annahmen gemacht werden. Die wesentliche Annahme besteht darin, daß man mit Hilfe der LRT jederzeit Voraussagen kann, wie der Polarisationsvektor der beiden Photonen orientiert ist. Demzufolge hängen die Meßergebnisse der Beobachter A und B nur von den verborgenen Parametern ( $\lambda$ ) des Photonenpaares und ihrer jeweils eigenen Meßapparatur ab (Lokalität). Insbesondere sind die Meßergebnisse des einen Beobachters unabhängig von der Wahl der Polarisatorrichtung des anderen Beobachters, im Gegensatz zu den Vorhersagen der Quantenmechanik für verschränkte Zustände. Im Formalismus der Quantenmechanik ist die Polarisierung der beiden Photonen unbestimmt, bis sie durch den Meßprozeß auf eine bestimmte Richtung im Raum projiziert wird.

Zusammenfassend können sich so für einen beliebigen Zustand des Photonenpaares folgende Meßergebnisse einstellen: Beobachter A findet die Resultate  $a(\vec{a}_1, \lambda) \equiv a_1 = \pm 1$  oder  $a(\vec{a}_2, \lambda) \equiv a_2 = \pm 1$ ; Beobachter B entsprechend  $b(\vec{\beta}_1, \lambda) \equiv b_1 = \pm 1$  oder  $b(\vec{\beta}_2, \lambda) \equiv b_2 = \pm 1$ . Wichtig ist, daß die LRT-Observablen  $a(\vec{a}_i, \lambda)$  und  $b(\vec{\beta}_i, \lambda)$  diese Meßergebnisse schon vor der eigentlichen Messung voraussagen. Um eine experimentell zugängliche Meßgröße zu erhalten, betrachtet man den Ausdruck  $(a_1 + a_2)b_1 + (a_2 - a_1)b_2$ . Für alle möglichen Meßergebnisse gilt  $(a_1 + a_2)b_1 + (a_2 - a_1)b_2 = \pm 2$ .

Bei oftmaliger Wiederholung des Experiments können die verborgenen Parameter  $\lambda$  verschiedene Werte annehmen, die innerhalb einer LRT durch eine normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(\lambda)$  gewichtet werden. Mitteln wir über ein statistisches Ensemble von Experimenten, so fordert jede LRT

$$\int_{\Lambda} d\lambda P(\lambda) |(a_1 + a_2)b_1 + (a_2 - a_1)b_2| = 2. \quad (1)$$

Daraus folgt aber sofort

$$|\int_{\Lambda} d\lambda P(\lambda) [(a_1 + a_2)b_1 + (a_2 - a_1)b_2]| \leq 2 \quad (2)$$

und damit

$$|\langle a_1 b_1 \rangle_{\text{LRT}} + \langle a_2 b_1 \rangle_{\text{LRT}} + \langle a_2 b_2 \rangle_{\text{LRT}} - \langle a_1 b_2 \rangle_{\text{LRT}}| \leq 2. \quad (3)$$

Diese Variante der Bellschen Ungleichung wurde erstmals von Clauser, Horne, Shimony und Holt (CHSH) hergeleitet [6]. Sie definiert im Rahmen einer lokalen Theorie mit verborgenen Parametern eine obere Schranke für mögliche Korrelationen der Meßergebnisse der beiden räumlich separierten Beobachter A und B. In der Ungleichung (3) stehen nun experimentell zugängliche Meßgrößen. So läßt sich zum Beispiel der erste Term dadurch ermitteln, daß Beobachter A und Beobachter B den Mittelwert über das Produkt ihrer Messungen mit den Polarisatoren in Stellung  $\vec{a}_1$  und  $\vec{\beta}_1$  bilden.

Welche Vorhersagen macht im Gegensatz dazu die Quantentheorie für die statistischen Mittelwerte, die die CHSH-Ungleichung bestimmen? Quantenmechanisch wird die Messung der dichotomen Polarisationsvariablen  $\hat{a}_i$  und  $\hat{b}_i$  durch Spinoperatoren von der Form  $\hat{a}_i \equiv \vec{a}_i \cdot \vec{\sigma}^A$  und  $\hat{b}_i \equiv \vec{\beta}_i \cdot \vec{\sigma}^B$  charakterisiert. Dabei sind die kartesischen Komponenten von  $\vec{\sigma}^A$  und  $\vec{\sigma}^B$  Paulische Spinmatrizen für Beobachter A und B. Betrachten wir als Beispiel einen verschränkten quantenmechanischen Zustand (siehe dazu Infokasten 1) von der Form

$$|\psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|+1\rangle_A |-1\rangle_B - |-1\rangle_A |+1\rangle_B), \quad (4)$$

wobei  $|\pm 1\rangle_A$  ( $|\pm 1\rangle_B$ ) Eigenzustände des Spinoperators

$\sigma_z^A$  ( $\sigma_z^B$ ) mit Eigenwerten  $\pm 1$  bezeichnen und somit wieder die horizontale bzw. vertikale Polarisationsrichtung kodieren. Welche charakteristischen Eigenschaften hat dieser verschränkte Quantenzustand? Zunächst erkennen wir leicht die Eigenschaft

$$\rho^A = \text{Tr}_B[|\psi\rangle\langle\psi|] = 1/2(|+1\rangle_A\langle+1| + |-1\rangle_A\langle-1|) \quad (5)$$

und analog für  $\rho^B$  ( $\text{Tr}_B$  bedeutet dabei Mittelung über die Freiheitsgrade von Teilchen B). Was die Polarisatoneigenschaften betrifft, die die Beobachter A und B jeweils für sich alleine feststellen können, ist daher dieser quantenmechanische Zustand völlig unpolarisiert. Die Meßwerte der Operatoren  $\hat{a}_i$  und  $\hat{b}_i$  sind somit bei vielen Wiederholungen des Experiments völlig zufällig verteilt, d. h.  $\langle\hat{a}_i\rangle = \langle\hat{b}_i\rangle = 0$ . Wird aber der Polarisationszustand des Photonenpaares von beiden Beobachtern gleichzeitig entlang derselben Polarisationsrichtung gemessen, so ergeben sich perfekte Korrelationen zwischen den Meßergebnissen: Wenn Beobachter A den Wert +1 mißt, stellt Beobachter B den Wert -1 fest und umgekehrt (siehe dazu Kasten 1). Die charakteristischen Polarisatoneigenschaften sind also vollständig auf beide Teilchen verteilt, ohne in einem der beiden Teilchen jeweils für sich alleine vorhanden zu sein. Für den quantenmechanischen Mittelwert  $\langle\hat{a}_i\hat{b}_i\rangle_{\text{QM}}$  ergibt sich in diesem Zustand

$$\langle\hat{a}_i\hat{b}_i\rangle_{\text{QM}} = \langle\psi|(\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\sigma}^A)(\vec{\beta}_i \cdot \vec{\sigma}^B)|\psi\rangle = -\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\beta}_i. \quad (6)$$

Wählen wir die Polarisationsrichtungen speziell so, daß  $(\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_1)$ ,  $(\vec{\beta}_1, \vec{\alpha}_2)$ ,  $(\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_2)$  jeweils den Winkel  $\pi/4$  einschließen, erhalten wir

$$\langle\hat{a}_1\hat{b}_1\rangle_{\text{QM}} + \langle\hat{a}_2\hat{b}_1\rangle_{\text{QM}} + \langle\hat{a}_2\hat{b}_2\rangle_{\text{QM}} - \langle\hat{a}_1\hat{b}_2\rangle_{\text{QM}} = 2\sqrt{2} > 2. \quad (7)$$

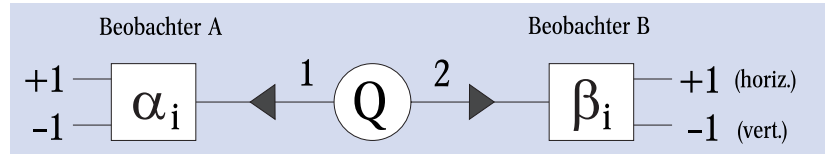
Die durch die Quantenmechanik für den verschränkten Zustand (4) und diese Wahl der Polarisationsrichtungen vorausgesagten Korrelationen der Meßergebnisse von A und B verletzen somit die CHSH-Ungleichung (3) und sind stärker als jede mögliche Korrelation, die im Rahmen einer lokalen Theorie mit verborgenen Parametern möglich ist. Dieses wichtige Ergebnis eröffnet folglich einen Weg, um experimentell zu entscheiden, ob es überhaupt möglich ist, die Quantenmechanik durch eine lokale Theorie zu ersetzen. Das wäre nur dann möglich, wenn die gemessenen Korrelationen Ungleichung (3) erfüllen.

### Experimentelle Tests

Erste experimentelle Tests der Bellschen Ungleichungen wurden bereits vor über 20 Jahren durchgeführt [7]. Seitdem gab es zahlreiche Nachfolgeexperimente. Alle diese Experimente bestätigten Gleichung (7) und damit die Vorhersage der Quantenmechanik, daß Korrelationen verschränkter Zustände nicht durch lokale Theorien mit verborgenen Parametern beschreibbar sind. Warum ist es trotzdem von Interesse, experimentelle Tests dazu auch heute noch durchzuführen? Einer der Gründe dafür ist sicherlich die fundamentale Bedeutung dieser Ergebnisse für die Grundlagen der Quantenmechanik und die noch immer nicht vollständig widerlegten Zweifel daran, ob bisher durchgeführte Experimente auch wirklich eine Verletzung der Bellschen Ungleichungen logisch zwingend bestätigen. Derzeit beziehen sich diese Zweifel vor allem auf zwei Schwachpunkte (*loopholes*) in der Argumentationskette. Der eine Schwachpunkt betrifft die Lokalitätsannahme, die der Bellschen Ungleichung zugrunde liegt (*locality* oder *communication loophole*). Der

andere Schwachpunkt betrifft die nicht perfekte Effizienz, mit der die korrelierten Ereignisse durch Detektoren registriert werden (*detection loophole*).

Nach der Lokalitätsannahme dürfen die Meßergebnisse der Beobachter A und B nur von den verborgenen Parametern des Photonenpaares und der Wahl der jeweils eigenen Polarisatorrichtung abhängen. Es muß also ausgeschlossen sein, daß Information über die jeweils eingestellten Polarisatorrichtungen über irgendei-



**Abb. 1:** Grundexperiment zur Bell-Ungleichung. Die Quelle  $Q$  emittiert die korrelierten Photonen 1 und 2. Beobachter A und B messen die Polarisation ihres jeweiligen Photons mit einem Polarisator entlang der Richtungen  $\vec{\alpha}_i$  und  $\vec{\beta}_i$ , wobei sie den Polarisator zufällig zwischen zwei Richtungen  $\vec{\alpha}_1$  und  $\vec{\alpha}_2$  bzw.  $\vec{\beta}_1$  und  $\vec{\beta}_2$  hin und her schalten. Als Ergebnis finden sie entweder horizontal (-1) oder vertikal (+1) polarisierte Photonen. In der klassischen Physik hat die Messung an Photon 1 keinen Einfluß auf das Ergebnis der Polari-

sationsmessung an Photon 2. In der Quantenmechanik ist das anders: Vor der Messung ist die Polarisation der einzelnen Photonen unbestimmt. Erst durch den Meßprozess an einem Photon, z. B. 1, wird dessen Polarisation auf das Koordinatensystem des Polarisators projiziert. Damit steht sofort auch die Polarisation von Photon 2 fest. Diese nichtlokale, „geisterhafte Fernwirkung“ wollte Einstein Zeit seines Lebens nicht akzeptieren.

nen Kanal zwischen den Detektoren ausgetauscht wird. Um diese Lokalitätsannahme zu realisieren, haben bereits Aspect et al. in ihrem berühmten Experiment die Richtungen der Polarisatoren nach der Erzeugung des Photonenpaares durch quasi-periodische Polarisationsmodulatoren geändert [8]. An diesem Experiment wurde allerdings kritisiert, daß diese Polarisationsänderungen nicht zufällig, sondern deterministisch erfolgten [9]. Vor kurzem wurde daher in Innsbruck ein Experiment mit zufällig gewählten Polarisationsrichtungen durchgeführt [2], um die Argumentationslücke bezüglich der Lokalitätsannahme zu schließen. In diesem Experiment wurden die beiden Beobachter 400 m separiert und die Polarisationsrichtungen von Zufallszahlengeneratoren gesteuert. Jedes einzelne Experiment dauerte weniger als  $1,3 \mu\text{s}$ . Eine Signalübertragung zwischen den Beobachtern A und B, selbst mit Lichtgeschwindigkeit, konnte somit ausgeschlossen werden. Die CHSH-Ungleichung (3) wurde in diesem Experiment mit 30 Standardabweichungen verletzt. Unter der Voraussetzung einer idealen Arbeitsweise der Zufallszahlengeneratoren und ideal arbeitender Detektoren wäre mit diesem Experiment in der Tat die Argumentationsschwäche bisheriger Experimente in bezug auf die Lokalitätsannahme beseitigt. Leider lag in diesem Experiment die Detektoreffizienz nur bei etwa 5 %.

Auch bei allen anderen bisher durchgeführten Experimenten war die Effizienz der verwendeten Detektoren zur Messung der Polarisatoneigenschaften des Photonenpaares nicht sehr hoch. Dadurch war die Anzahl der registrierten Ereignisse immer wesentlich kleiner als die Anzahl der tatsächlich präparierten Photonenpaare. Es mußte für die Auswertung der experimentellen Daten angenommen werden, daß die registrierten Daten ein repräsentatives statistisches Ensemble darstellen (*fair sampling assumption*). Vom Standpunkt einer lokalen Theorie mit verborgenen Parametern aus betrachtet, wäre es allerdings möglich, daß diese unbekannt, verborgenen Parameter auch die Wahrscheinlichkeit be-

einflussen, mit der ein Photonenpaar registriert werden kann. Unter dieser Annahme läßt sich sogar ein Modell einer LRT konstruieren, das zu denselben Korrelationen führt wie der verschränkte Zustand (4) und damit die CHSH-Ungleichung ebenfalls maximal verletzt [10]. Unter der Annahme eines solchen Mechanismus könnten also alle bisherigen Experimente zur Verletzung der Bellschen Ungleichungen durch eine lokale Theorie mit verborgenen Parametern erklärt werden. Eine der Schlußfolgerungen dieses theoretischen Modells ist es, daß es aussichtslos ist, mit Detektoreffizienzen von weniger als 75 % die Argumentationslücke des *detection loophole* zu beseitigen [10]. Schon früher wurde gezeigt, daß diese Argumentationslücke mit Detektoreffizienzen besser als  $2/(1+\sqrt{2}) \approx 82,8\%$  geschlossen werden kann [11]. Ob dies auch für kleinere Detektoreffizienzen im Bereich zwischen 75 % und 82,8 % möglich ist, ist noch eine offene Frage. In allen bisher durchgeführten Experimenten waren die Detektoreffizienzen jedenfalls wesentlich kleiner als die untere Schranke von 75 %. Zur Zeit versuchen verschiedene Gruppen, das Nachweisverfahren entsprechend zu verbessern, um diese Argumentationslücke endgültig zu schließen [12, 13]. Eine Idee dabei ist, die bisher verwendeten verschränkten Photonenpaare durch verschränkte Zustände von Atomen zu ersetzen, denn übliche Detektoren für Atome weisen wesentlich bessere Effizienzen auf. Einen ersten Schritt in diese Richtung stellt das Experiment der Gruppe von J. M. Raimond und S. Haroche dar, in dem erstmals zwei Atome nichtlokal miteinander korreliert wurden [13]. Auch die Gruppe von H.

Walther am Max-Planck-Institut für Quantenoptik konnte vor kurzem verschränkte Atome nachweisen [14].

### Drei verschränkte Teilchen: GHZ-Zustände

Die Lokalitätsannahme, die den Bellschen Ungleichungen zugrunde liegt, kann auch zu andersartigen Widersprüchen mit der Quantenmechanik führen. Im Gegensatz zu den Bellschen Ungleichungen beziehen sich diese Widersprüche auf die logische Konsistenz von möglichen Einzelmessungen und nicht auf statistische Ensembleeigenschaften. Besonders deutlich wird dies anhand verschränkter Quantenzustände, die aus mehr als zwei Teilchen oder Untersystemen bestehen. Um dies zu erläutern, betrachten wir als einfaches Beispiel einen verschränkten Dreiphotonenzustand der Form

$$|\psi\rangle_{\text{GHZ}} = (1/\sqrt{2})(|+1\rangle_A|+1\rangle_B|+1\rangle_C - |-1\rangle_A|-1\rangle_B|-1\rangle_C), \quad (8)$$

einen sogenannten GHZ-Zustand. Dieser Zustand ist benannt nach Greenberger, Horne und Zeilinger [15], die erstmals auf die im folgenden beschriebenen Konsequenzen der Lokalitätsannahme hingewiesen haben. Dieser verschränkte Zustand dreier räumlich weit separierter Photonen werde von drei ebenfalls räumlich weit voneinander entfernten Beobachtern auf seine Polarisations-eigenschaften hin untersucht.

Betrachten wir zunächst die Konsequenzen einer LRT. Da die drei Beobachter räumlich weit voneinander entfernt sind, können sie unter Voraussetzung der Lokalitätsannahme an jedem der Photonen die Polarisationen messen, ohne sich dabei gegenseitig zu beeinflussen. Die möglichen Polarisationswerte, die jeder der Beobachter dabei messen kann, sind  $a_i = \pm 1$ ,  $b_i = \pm 1$ ,  $c_i = \pm 1$  für Beobachter A, B und C entlang der Richtungen  $\vec{\alpha}_i$ ,  $\vec{\beta}_i$  und  $\vec{\gamma}_i$ . Betrachten wir nun vier mögliche Ergebnisse solcher Dreifachkoinzidenzmessungen entlang speziell ausgewählter Polarisationsrichtungen mit den Resultaten  $(a_x, b_x, c_x)$ ,  $(a_x, b_y, c_y)$ ,  $(a_y, b_x, c_y)$ ,  $(a_y, b_y, c_x)$ . Für das Produkt dieser vier Koinzidenzmessungen ergibt sich im Rahmen einer LRT

$$E_{\text{LRT}} \equiv (a_x b_x c_x)(a_x b_y c_y)(a_y b_x c_y)(a_y b_y c_x) = a_x^2 b_x^2 c_x^2 a_y^2 b_y^2 c_y^2 = 1. \quad (9)$$

Welches Ergebnis liefert die Quantenmechanik für den Zustand aus Gleichung (8)? In der Quantenmechanik werden die Polarisationsvariablen  $a_i, b_i, c_i$  durch Spinoperatoren  $\hat{a}_i = \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\sigma}^A$ ,  $\hat{b}_i = \vec{\beta}_i \cdot \vec{\sigma}^B$ ,  $\hat{c}_i = \vec{\gamma}_i \cdot \vec{\sigma}^C$  charakterisiert. Für den GHZ-Zustand (8) gelten für die Spinoperatoren, die diese vier Koinzidenzmessungen beschreiben, die Relationen

$$\hat{a}_x \hat{b}_x \hat{c}_x |\psi\rangle_{\text{GHZ}} = -|\psi\rangle_{\text{GHZ}}, \quad (10)$$

$$\hat{a}_x \hat{b}_y \hat{c}_y |\psi\rangle_{\text{GHZ}} = \hat{a}_y \hat{b}_x \hat{c}_x |\psi\rangle_{\text{GHZ}} = \hat{a}_y \hat{b}_y \hat{c}_x |\psi\rangle_{\text{GHZ}} = |\psi\rangle_{\text{GHZ}}.$$

Für das Produkt der vier Koinzidenzmessungen ergibt die Vorhersage der Quantenmechanik in diesem Zustand daher

$$E_{\text{QM}} = (-1) \times (+1) \times (+1) \times (+1) \equiv -1$$

im Widerspruch zum entsprechenden klassischen Resultat. Das ist natürlich eine äußerst elegante Argumentation, um Voraussagen einer LRT mit denen der Quantenmechanik zu konfrontieren. Denn während man bei zwei verschränkten Teilchen eine ganze Meßreihe durchführen muß, um die Bellsche Ungleichung (3) zu überprüfen, genügt hier im Prinzip eine

### Kasten 2 – Grundzüge einer lokalen realistischen Theorie (LRT) verborgener Parameter

Unsere an einer klassischen Welt geschulte Vorstellungskraft tut sich schwer mit dem nichtlokalen Charakter der Quantenmechanik. Deshalb entstanden immer wieder alternative Theorien, die auf Lokalität und Realität physikalischer Größen aufbauen. Albert Einstein glaubte zeitweilig, daß die Quantenmechanik eines Tages durch eine solche LRT abgelöst werden wird. Wir beschreiben im folgenden ihre Struktur. Es ist erstaunlich, wie wenig Annahmen dazu notwendig sind. Wir beziehen uns bei der Beschreibung dieser Annahmen auf das in Abb. 1 dargestellte Experiment. Innerhalb einer LRT wird der physikalische Zustand der beiden von der Quelle Q gelieferten Teilchen (Photonen) vollständig durch den „versteckten“ Parametersatz  $\lambda$  beschrieben. Dieses  $\lambda$  kann eine Menge komplexer Zahlen, Funktionen, etc. bezeichnen. Wenn die Quelle Q nicht perfekt arbeitet, wird sie Teilchen mit unterschiedlichem  $\lambda$  liefern. Dies wird in einer LRT durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(\lambda)$  berücksichtigt. Die Summe über den Raum  $\Lambda$  aller möglichen  $\lambda$ -Kombinationen wird normiert:

$$\int_{\Lambda} d\lambda P(\lambda) = 1.$$

Das sind die wesentlichen Elemente für die Zustandsbeschreibung im Rahmen einer LRT. Bei der Charakterisierung der Observablen kommt der lokale und realistische Charakter einer sol-

chen Theorie zum Vorschein. Zum einen sollen die Werte, die von den einzelnen Beobachtern gemessen werden, nur von ihren jeweils eigenen Meßeinstellungen abhängen (Lokalität). Für unser Beispiel in Abb. 1 bedeutet das, daß die Observable von Beobachter A (B) nur von der Polarisatorrichtung  $\vec{\alpha}_i$  ( $\vec{\beta}_i$ ) abhängt. Zum anderen sind die Meßwerte, die ein Beobachter abliest, a priori festgelegt, sobald das zugehörige  $\lambda$  bekannt ist (Realität). Für das Polarisatorrichtungsexperiment von Abb. 1 heißt das folglich: je nach  $\lambda$  und der gewählten Polarisatorrichtung  $\vec{\alpha}_i$  nimmt die Observable  $a$  von Beobachter A nur zwei Werte an:

$$a(\vec{\alpha}_i, \lambda) = +1 \text{ oder } -1.$$

Entsprechendes gilt für die Observable  $b$  von Beobachter B. Über viele Experimente gemittelt findet Beobachter A also die Erwartungswerte

$$\langle a_i \rangle_{\text{LRT}} = \int_{\Lambda} d\lambda P(\lambda) a(\vec{\alpha}_i, \lambda),$$

falls eine LRT die korrekte Beschreibung darstellt. Für die Konstruktion einer Bellschen Ungleichung (siehe Text) sind insbesondere die Korrelationen

$$\langle a_i b_j \rangle_{\text{LRT}} = \int_{\Lambda} d\lambda P(\lambda) a(\vec{\alpha}_i, \lambda) b(\vec{\beta}_j, \lambda)$$

wichtig. Diese allgemeinen Elemente genügen, um die quantitativen Vorhersagen einer LRT mit denen der Quantenmechanik zu vergleichen.

einzigste Messung, um die lokalen Theorien verborgener Parameter zu widerlegen.

Im Labor bedarf die Präparation eines reinen GHZ-Zustands großer Kunstfertigkeit. Vor kurzem wurden in ersten Experimenten in Los Alamos und Innsbruck solche verschränkten Dreiteilchenzustände vom GHZ-Typ hergestellt. Während beim Experiment in Los Alamos [16] der verschränkte Zustand aus drei Kernspins in einem Molekül gebildet wurde, demonstrierte das Innsbrucker Experiment [17] die Erzeugung eines räumlich separierten, verschränkten Dreiphotonenzustands aus ursprünglich zwei verschränkten Photonenpaaren. Von der Innsbrucker Gruppe wird darauf aufbauend derzeit auch ein Test der Verletzung lokaler, realistischer Theorien mit GHZ-Zuständen vorbereitet. Diese Experimente sind erste, vielversprechende Schritte zur Erzeugung verschränkter Zustände, mit denen sich auch Aspekte der Nichtlokalität testen lassen, die über die Bellschen Ungleichungen hinausgehen.

### Verschränkte Zustände für die Anwendung

Neben der fundamentalen Bedeutung für Tests der Grundlagen der Quantenmechanik ist in letzter Zeit die technologische Bedeutung verschränkter Quantenzustände für die Quanteninformationsverarbeitung immer mehr in den Vordergrund getreten [18]. Verschränkte Quantenzustände lassen sich etwa dazu benutzen, geheime Schlüssel zwischen verschiedenen Parteien annähernd abhörsicher zu übertragen (Quantenkryptographie) [19]; sie können für die Übertragung eines beliebigen Quantenzustands von einem Teilchen auf ein anderes genutzt werden (Quantenteleportation [20]) oder sie können algorithmisch beispielweise zum schnellen Faktorisieren von Zahlen verwendet werden (Quantencomputer) [21]. Für alle diese technologisch interessanten Anwendungen ist es erforderlich, die Frage zu beantworten, über welche makroskopischen Distanzen eine Verschränkung zwischen Quantenzuständen aufrechterhalten werden kann. Sowohl das Innsbrucker Experiment [2] als auch das vor kurzem in Genf durchgeführte Experiment [1] sind hierzu eindrucksvolle Demonstrationen. Im Genfer Experiment werden quantenmechanische Korrelationen, die die Bellschen Ungleichungen verletzen, sogar über makroskopische Distanzen von rund 11 km nachgewiesen. Das dabei verwendete Photonenpaar wurde in Genf erzeugt, über Glasfaserkabel in die Orte Bellevue und Bernex gesendet und in diesen Orten detektiert. Die Verletzung der Ungleichung (3) betrug 16 Standardabweichungen.

Bei allen diesen Entwicklungen der letzten Jahre ist es besonders interessant festzustellen, wie sich die Blickrichtung auf das quantenmechanische Phänomen der Verschränkung geändert hat. Das anfängliche Stauen ist mehr und mehr dem Bestreben gewichen, dieses grundlegende Phänomen technologisch zu nutzen. Die sich daraus entwickelnde Quanteninformationsverarbeitung<sup>1)</sup>, die sich in ihren Grundzügen bereits abzeichnen beginnt und die bereits erste Erfolge zeigt, könnte eine der Zukunftstechnologien des neuen Jahrhunderts werden.

### Literatur

- [1] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden und N. Gisin, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3563 (1998)
- [2] G. Weihs, T. Jennewein, Ch. Simon, H. Weinfurter und A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5039 (1998)
- [3] E. Schrödinger, *Die Naturwissenschaften* **48**, 807 (1935).
- [4] A. Einstein, B. Podolsky und N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [5] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964)
- [6] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony und R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969)
- [7] F. Selleri, *Quantum Paradoxes and Physical Reality* (Kluwer, Dordrecht, 1989)
- [8] A. Aspect, J. Dalibard und G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982)
- [9] A. Zeilinger, *Phys. Lett. A* **118**, 1 (1986)
- [10] N. Gisin und B. Gisin, *quant-ph/9905018* (1999)
- [11] J. F. Clauser und M. A. Horne, *Phys. Rev. D* **10**, 526 (1974); A. Garg und N. D. Mermin, *Phys. Rev. D* **35**, 3831 (1987)
- [12] E. S. Fry, Th. Walther und S. Li, *Phys. Rev. A* **52**, 4381 (1995); Th. Walther und E. S. Fry, *Phys. Bl.*, März 1997, S. 229; M. Freyberger, P. K. Aravind, M. A. Horne und A. Shimony, *Phys. Rev. A* **53**, 1232 (1996).
- [13] E. Hagley, X. Maitre, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. Raimond und S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1 (1997).
- [14] B.-G. Englert, M. Löffler, O. Benson, B. Varcoe, M. Weidinger und H. Walther, *Fortschr. Phys.* **46**, 987 (1998)
- [15] D. M. Greenberger, M. A. Horne und A. Zeilinger, in *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Concepts of the Universe*, S. 73, hrsg. von M. Kafatos (Kluwer Academics, Dordrecht, 1989); N. D. Mermin, *Am. J. Phys.* **58**, 731 (1990).
- [16] R. Laflamme, E. Knill, W. H. Zurek, P. Catasti und S. V. S. Mariappan, *Philos. Trans. R. Soc. London A* **356**, 1941 (1998)
- [17] D. Bouwmeester, J. W. Pan, M. Daniell, H. Weinfurter und A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1345 (1999)
- [18] Siehe das Sonderheft von *Physics World*, März 1999, S. 33 ff.
- [19] W. Tittel et al., *Phys. Bl.*, Juni 1999, S. 25
- [20] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Josza, A. Peres und W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993)
- [21] H.-J. Briegel, J. Cirac und P. Zoller, *Phys. Bl.*, September 1999, S. 37

1) vgl. Schwerpunktprogramm „Quanten-Informationsverarbeitung“ der DFG, Koordinator: Prof. G. Leuchs, Erlangen, <http://kerr.physik.uni.erlangen.de/giv/>