1. Der in Abb. 1 dargestellte Kreisprozess wird mit einem elektromagnetischen Feld ausgeführt.

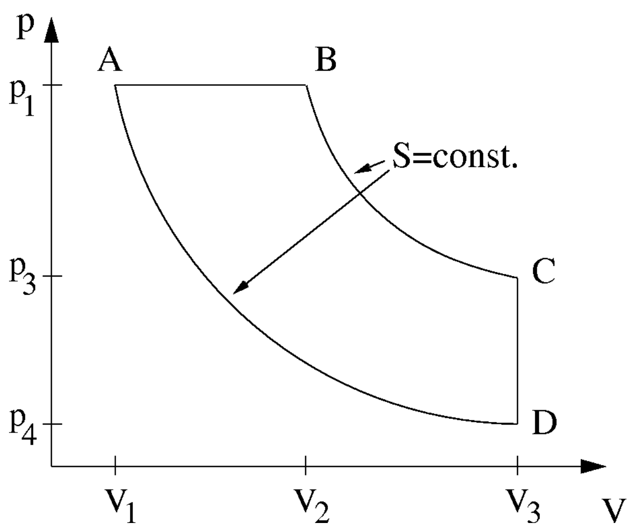

Abb. 1. Diesel-Kreisprozess. Die Schritte B→C sowie D→A werden isentrop (adiabatisch) ausgeführt.

(a) Bestimmen Sie ausgehend von der entropischen Fundamentalrelation des elektromagnetischen Feldes

$$S(U,V) = \frac{4}{3} b^{1/4} V \left(\frac{U}{V}\right)^{3/4}$$

die Zustandsgleichungen (dabei ist b die Stefan-Boltzmann-Konstante). 2P.

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(U,V)}{\partial U} = b^{1/4} V^{1/4} U^{-1/4} \quad \Rightarrow \quad U = bVT^4$$

$$\frac{p}{T} = \frac{\partial S(U,V)}{\partial V} = \frac{1}{3} b^{1/4} V^{-3/4} U^{3/4} \quad \Rightarrow$$

$$pV = \frac{1}{3} b^{1/4} V^{1/4} U^{3/4} T = \frac{1}{3} b^{1/4} V^{1/4} U^{3/4} b^{-1/4} V^{-1/4} U^{1/4} = \frac{U}{3}$$

(b) Berechnen Sie die Temperaturen T_i, $i = 1, \ldots, 4$ an den Punkten A, B, C und D in Abhängigkeit des Druckes p_1 und der Volumina V_1, V_2 und V_3. Bestimmen Sie zusätzlich die Drücke p_3 und p_4 an den Punkten C und D. 5P.

Aus den in (a) bestimmten Zustandsgleichungen folgt die Beziehung $p = bT^4/3$. Ferner ergibt sich aus der angegebenen Fundamentalrelation die Bedingung $U^3V = konst.$ für adiabatische

Zustandsänderungen. Dies ist äquivalent zu $pV^{4/3} = konst.$ bzw. $T^3V = konst.$ Mit Hilfe dieser Beziehungen ermittelt man für die Temperaturen

$$\begin{aligned}
T_1 = T_2 \quad &= \quad \left(\frac{3p_1}{b}\right)^{1/4}, \\
T_2^3 V_2 = T_3^3 V_3 \quad \Rightarrow \quad T_3 = T_2 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{1/3} &= \left(\frac{3p_1}{b}\right)^{1/4} \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{1/3}, \\
T_4^3 V_3 = T_1^3 V_1 \quad \Rightarrow \quad T_4 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{1/3} &= \left(\frac{3p_1}{b}\right)^{1/4} \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{1/3}.
\end{aligned}$$

Für die Drücke folgt

$$\begin{aligned}
p_1 V_2^{4/3} = p_3 V_3^{4/3} \quad &\Rightarrow \quad p_3 = p_1 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{4/3}, \\
p_4 V_3^{4/3} = p_1 V_1^{4/3} \quad &\Rightarrow \quad p_4 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{4/3}.
\end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie die Arbeit, die jeweils in den Prozessschritten A→B, B→C, C→D und D→A vom System verrichtet wird. 3P.

$$\begin{aligned}
A \to B: &\quad \Delta W_{AB} = p_1(V_2 - V_1) > 0, \\
B \to C: &\quad \Delta W_{BC} = -\Delta U_{BC} = 3P_2V_2 - 3P_3V_3 = 3P_1V_2 \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{1/3}\right] > 0, \\
C \to D: &\quad \Delta W_{CD} = 0, \\
D \to A: &\quad \Delta W_{DA} = -\Delta U_{BC} = 3P_4V_4 - 3P_1V_1 = 3P_1V_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{1/3} - 1\right] < 0.
\end{aligned}$$

In den Schritten A→B und B→C gibt das System Arbeit nach außen ab, während im Schritt D→A dem System Arbeit zugeführt wird.

(d) Ermitteln Sie die Wärmen, die in den vier Prozessschritten vom System aufgenommen bzw. abgegeben werden. 2P.

$$\begin{aligned}
A \to B: &\quad \Delta Q_{AB} = \Delta W_{AB} + \Delta U_{AB} = p_1(V_2 - V_1) + 3p_1(V_2 - V_1) = 4p_1(V_2 - V_1) > 0, \\
B \to C: &\quad \Delta Q_{BC} = 0, \\
C \to D: &\quad \Delta Q_{CD} = \Delta U_{CD} = 3p_4V_3 - 3p_3V_3 = 3\frac{p_1}{V_3^{1/3}}\left(V_1^{4/3} - V_2^{4/3}\right) < 0, \\
D \to A: &\quad \Delta Q_{DA} = 0.
\end{aligned}$$

Im Schritt A→B nimmt das System Wärme auf, während im Schritt C→D Wärme abgegeben wird. In den adiabatischen Prozessschritten B→C und D→A wird Wärme weder zugeführt noch abgegeben.

(e) Bestimmen Sie den Wirkungsgrad η dieses Kreisprozesses, und zeigen Sie, dass die Beziehung $0 < \eta < 1$ erfüllt ist. 3P.

Der Wirkungsgrad für diesen Kreisprozess ist definiert als

$$\eta = \frac{\sum_i \Delta W_i}{\sum \Delta Q_{auf}}.$$

Dabei bezeichnet $\sum_i \Delta W_i$ die Summe aller vom System aufgenommenen bzw. abgebenen Arbeiten und $\sum \Delta Q_{auf}$ die insgesamt aufgenommene Wärme. Mit den Ergebnissen aus (c) und (d) findet man

$$\begin{aligned}
\sum_i \Delta W_i &= p_1(V_2 - V_1) + 3p_1V_2\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{1/3}\right] + 3p_1V_1\left[\left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{1/3} - 1\right] \\
&= 4p_1(V_2 - V_1) + 3\frac{p_1}{V_3^{1/3}}\left(V_1^{4/3} - V_2^{4/3}\right), \\
\sum \Delta Q_{auf} &= \Delta Q_{AB} = 4p_1(V_2 - V_1).
\end{aligned}$$

Es ist also

$$\eta = 1 - 3\frac{p_1}{V_3^{1/3}}\frac{\left(V_2^{4/3} - V_1^{4/3}\right)}{4p_1(V_2 - V_1)} = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{1/3}\frac{1 - (V_1/V_2)^{4/3}}{1 - (V_1/V_2)}.$$

Da $V_1 < V_2$ und $V_2 < V_3$, folgt aus dieser Darstellung die Beziehung $0 < \eta < 1$. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass die Funktion $y = (1 - x^{4/3})/(1 - x)$ (x entspricht hier V_1/V_2) für $0 \le x \le 1$ nur Werte $1 \le y \le 4/3$ annimmt. Zusammen mit dem Vorfaktor $3/4$ wird also von der 1 immer nur etwas abgezogen, das kleiner als 1 (aber größer als 0) ist.

2. Gegeben sei ein ideales Gas von strukturlosen Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen in einer dreidimensionalen isotropen harmonischen Teilchenfalle mit Frequenz ω.

   (a) Wie lauten die Einteilchenenergien und der Hamiltonoperator dieses Systems in zweiter Quantisierung? Wievielfach sind die Einteilchenenergien entartet? 2P.

   Der Hamiltonoperator dieses Systems lautet

$$\widehat{H} = \sum_{n_1,n_2,n_3=0}^{\infty}\sum_{\sigma=\pm}\varepsilon_{n_1n_2n_3,\sigma}\widehat{a}^\dagger_{n_1n_2n_3,\sigma}\widehat{a}_{n_1n_2n_3,\sigma}$$

mit den Einteilchen-Energien

$$\varepsilon_{n_1n_2n_3,\sigma} = \hbar\omega\left(n_1 + n_2 + n_3 + \tfrac{3}{2}\right).$$

Der Index $\sigma = \pm$ charakterisiert den Spin-Freiheitsgrad. Die Entartung der Einteilchenenergie $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + \frac{3}{2})$ beträgt

$$g(n) = 2\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(vgl. Aufgabe 3, Blatt 11; der zusätzliche Faktor 2 ist auf den Spin-Freiheitsgrad zurückzuführen). Der Operator $\widehat{a}_{n_1n_2n_3,\sigma}$ erfüllt die Antikommutator-Beziehungen

$$\begin{aligned}
\left[\widehat{a}_{n_1n_2n_3,\sigma}, \widehat{a}^\dagger_{m_1m_2m_3,\sigma'}\right]_+ &= \delta_{n_1,m_1}\delta_{n_2,m_2}\delta_{n_3,m_3}\delta_{\sigma,\sigma'}, \\
\left[\widehat{a}_{n_1n_2n_3,\sigma}, \widehat{a}_{m_1m_2m_3,\sigma'}\right]_+ = \left[\widehat{a}^\dagger_{n_1n_2n_3,\sigma}, \widehat{a}^\dagger_{m_1m_2m_3,\sigma'}\right]_+ &= 0.
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass die großkanonische Zustandssumme im Kontinuumlimes, der durch $N \to \infty$, $\omega \to 0$, $N\omega^3 = konst.$, $k_B T \gg \hbar\omega$ charakterisiert ist, die Gestalt

$$\ln Z_G(\lambda_1, \lambda_2) \;=\; \frac{1}{3(\hbar\omega\lambda_1)^3} \int_0^\infty dx\, \frac{x^3}{\exp(x+\lambda_2)+1}$$

besitzt. 3P.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\ln Z_G(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{n_1,n_2,n_3=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm} \ln\left[1 + \exp\left(-\lambda_1 \varepsilon_{n_1 n_2 n_3,\sigma} - \lambda_2\right)\right] \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ln\left[1 + \exp\left(-\lambda_1 \hbar\omega (n+3/2) - \lambda_2\right)\right].
\end{aligned}$$

Im Kontinuumlimes $\lambda_1 \hbar\omega \to 0$ erhält man daraus mit $x = \hbar\omega\lambda_1 n$ und partieller Integration

$$\begin{aligned}
\ln Z_G(\lambda_1, \lambda_2) &\approx \int_0^\infty dn\, n^2 \ln[1 + \exp(-\lambda_1 \hbar\omega n - \lambda_2)] \\
&= \frac{1}{(\hbar\omega\lambda_1)^3} \int_0^\infty dx\, x^2 \ln[1 + \exp(-x - \lambda_2)] \\
&= \frac{1}{3(\hbar\omega\lambda_1)^3} \int_0^\infty dx\, \frac{x^3}{\exp(x+\lambda_2)+1}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Dabei wurde beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile partiell integriert.

(c) Vereinfachen Sie die allgemeine Zustandssumme aus (b) für den Fall eines klassischen idealen Gases und bestimmen Sie daraus die mittlere Teilchenzahl $N(T, \mu)$ und die innere Energie $U(T, N)$. Welche Bedingung müssen die Teilchenzahl und die Temperatur erfüllen, damit die Näherung eines klassischen idealen Gases anwendbar ist? 5P.

Der Grenzfall des klassischen idealen Gases ist durch $\exp\lambda_2 \gg 1$ charakterisiert. Der Integrand in (**??**) kann dann durch $x^3 \exp(-x - \lambda_2)$ genähert werden, und man erhält

$$\ln Z_G(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3 \exp(-\lambda_2) \int_0^\infty dx\, x^3 \exp(-x) = 2\left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3 \exp(-\lambda_2).$$

Damit ergibt sich mit $-\lambda_2 = \mu/k_B T$

$$\begin{aligned}
N(T, \mu) &= -\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \lambda_2} = \ln Z_G = 2\left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3 \exp(\mu/k_B T), \\
U &= -\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \lambda_1} = \frac{3}{\lambda_1} \ln Z_G = 3 k_B T N.
\end{aligned}$$

Das Resultat für U steht im Einklang mit dem klassischen Gleichverteilungssatz, nach dem jeder Freiheitsgrad, der quadratisch in die Hamiltonfunktion eingeht, einen Beitrag $k_B T/2$ zur inneren Energie liefert. Im Fall des harmonischen Oszillators gehen alle $3N$ Orts- und Impulskoordinaten quadratisch ein.

Die Bedingung $\exp\lambda_2 \gg 1$ führt auf die Beziehung $k_B T \gg 2^{-1/3} \hbar\omega N^{1/3}$, die im klassischen Grenzfall erfüllt sein muss.

(d) Betrachten Sie den entarteten Fall des nicht wechselwirkenden Spin-$\frac{1}{2}$ Systems. Vereinfachen Sie die allgemeine Zustandssumme aus (b) im Grenzfall extremer Entartung, d.h., $T \to 0$. Bestimmen Sie die mittlere Teilchenzahl $N(T,\mu)$, das chemische Potenzial $\mu(T,N)$ und die innere Energie $U(T,N)$ in diesem Grenzfall. 5P.

Im Grenzfall extremer Entartung gilt $\exp\lambda_2 \ll 1$, d.h., $-\lambda_2 \gg 1$. Die Funktion $(\exp(x+\lambda_2)+1)^{-1}$ hat dann die Gestalt eines „Fermi-Blocks“, d.h., sie wechselt für wachsendes x in der Nähe von $x = -\lambda_2$ sehr rasch von 1 auf 0. Daher ergibt sich näherungsweise für die Zustandssumme

$$\ln Z_G(\lambda_1,\lambda_2) \approx \frac{1}{3}\left(\frac{k_BT}{\hbar\omega}\right)^3 \int_0^{-\lambda_2} dx\, x^3 = \frac{1}{12}\left(\frac{k_BT}{\hbar\omega}\right)^3 (-\lambda_2)^4.$$

Damit erhält man

$$N(T,\mu) \;=\; -\frac{\partial \ln Z_G}{\partial\lambda_2} = \frac{1}{3}\left(\frac{k_BT}{\hbar\omega}\right)^3 (-\lambda_2)^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{k_BT}{\hbar\omega}\right)^3\left(\frac{\mu}{k_BT}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{\hbar\omega}\right)^3,$$

d.h.,

$$\begin{aligned}
-\lambda_2 &= (3N)^{1/3}\frac{\hbar\omega}{k_BT},\\
\mu(T,N) &= -k_BT\lambda_2 = (3N)^{1/3}\hbar\omega,\\
U &= -\frac{\partial \ln Z_G}{\partial\lambda_1} = \frac{3}{\lambda_1}\ln Z_G = 3k_BT\frac{1}{12}\left(\frac{k_BT}{\hbar\omega}\right)^3(-\lambda_2)^4 = \frac{1}{4}(3N)^{4/3}\hbar\omega.
\end{aligned}$$

3. Gegeben sei ein ideales Gas von Bosonen mit Spin J im ultrarelativistischen Grenzfall vernachlässigbarer Ruhemasse, das in einem Behälter mit Volumen V eingeschlossen ist. Betrachten Sie im Folgenden den thermodynamischen Limes dieses Systems.

(a) Zeigen Sie, dass die großkanonische Zustandssumme oberhalb der kritischen Temperatur T_c für Bose-Einstein-Kondensation durch

$$\ln Z_G(\lambda_1,\lambda_2) = (2J+1)\frac{8\pi V}{(2\pi\hbar\lambda_1 c)^3} g_4(e^{-\lambda_2})$$

gegeben ist. 3P.

Im ultrarelativistischen Grenzfall sind die Einteilchenenergien durch $\varepsilon(\vec{p}) = c|\vec{p}|$ gegeben (vgl. Blatt 9). Im Kontinuumlimes gilt dann für die großkanonische Zustandssumme oberhalb der kritischen Temperatur

$$\begin{aligned}
\ln Z_G(\lambda_1,\lambda_2) &= -(2J+1)\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p \ln\left(1 - e^{-\lambda_1 c|\vec{p}|-\lambda_2}\right)\\
&= -(2J+1)\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty dp p^2 \ln\left(1 - e^{-\lambda_1 cp-\lambda_2}\right)\\
&= -(2J+1)\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar\lambda_1 c)^3}\int_0^\infty dx x^2 \ln\left(1 - e^{-x-\lambda_2}\right)\\
&= (2J+1)\frac{4\pi V}{3(2\pi\hbar\lambda_1 c)^3}\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^{x+\lambda_2}-1}\\
&= (2J+1)\frac{4\pi V}{3(2\pi\hbar\lambda_1 c)^3}\Gamma(4) g_4(e^{-\lambda_2}) = (2J+1)\frac{8\pi V}{(2\pi\hbar\lambda_1 c)^3} g_4(e^{-\lambda_2}).
\end{aligned}$$

Dabei wurde beim Übergang von der dritten zur vierten Zeile partiell integriert und in der nächsten Umformung eine der Beziehungen verwendet, die in der Formelsammlung für die Bose-Einstein-Funktion angegeben ist.

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe der großkanonischen Zustandssumme die innere Energie U, den Druck p, die Teilchenzahl N sowie die Entropie als Funktion von T, V und μ. 6P.

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \lambda_1} = \frac{3}{\lambda_1} \ln Z_G = (2J+1)\frac{3V(k_BT)^4}{\pi^2(\hbar c)^3} g_4(e^{\mu/k_BT}), \\
p &= \frac{k_BT}{V} \ln Z_G = (2J+1)\frac{(k_BT)^4}{\pi^2(\hbar c)^3} g_4(e^{\mu/k_BT}), \\
N &= -\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \lambda_2} = (2J+1)\frac{V(k_BT)^3}{\pi^2(\hbar c)^3} g_3(e^{\mu/k_BT}), \\
S &= \frac{1}{T}(U + pV - \mu N) = \frac{1}{T}(3k_BT \ln Z_G + k_BT \ln Z_G - \mu N) = 4k_B \ln Z_G - \frac{\mu}{T} N \\
&= (2J+1)k_B \frac{4V(k_BT)^3}{\pi^2(\hbar c)^3} g_4(e^{\mu/k_BT}) - (2J+1)k_B \frac{\mu V(k_BT)^2}{\pi^2(\hbar c)^3} g_3(e^{\mu/k_BT}) \\
&= (2J+1)k_B \frac{V(k_BT)^2}{\pi^2(\hbar c)^3} \left[4k_BT g_4(e^{\mu/k_BT}) - \mu g_3(e^{\mu/k_BT})\right].
\end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie T_c in Abhängigkeit von der Teilchendichte. 3P.
Aus Aufgabenteil (b) folgt, dass die Teilchendichte n in Abhängigkeit von der Temperatur T und dem chemischen Potential μ durch

$$n = (2J+1)\frac{(k_BT)^3}{\pi^2(\hbar c)^3} g_3(e^{\mu/k_BT})$$

gegeben ist. Die Funktion $g_3(x)$ ist nur für $0 \leq x \leq 1$ definiert und nimmt ihr Maximum $g_3(1) = \zeta(3)$ bei $x = 1$ an. Die maximale Teilchendichte, die bei festem T erreicht werden kann, ohne dass Kondensation eintritt, ergibt sich also für $\mu = 0$ und hat den Wert

$$n = (2J+1)\frac{(k_BT)^3}{\pi^2(\hbar c)^3}\zeta(3).$$

Anders ausgedrückt, beträgt die kritische Temperatur T_c für Bose-Einstein-Kondensation bei gegebener Teilchendichte

$$k_BT_c = \hbar c \left[\frac{\pi^2 n}{(2J+1)\zeta(3)}\right]^{1/3}.$$

(d) Wie hängt die relative Anzahl N_0/N der Teilchen im Kondensat von der skalierten Temperatur T/T_c ab? 3P.
Unterhalb der Kondensationstemperatur müssen bei der Berechnung der Teilchenzahl die Teilchen im Kondensat separat betrachtet werden. Da $\mu = 0$, folgt mit den Ergebnissen aus (b) und (c)

$$\begin{aligned}
N &= N_0 + (2J+1)\frac{V(k_BT)^3}{\pi^2(\hbar c)^3}\zeta(3) = N_0 + (2J+1)\frac{V(k_BT)^3}{\pi^2(\hbar c)^3}\zeta(3) \cdot \frac{(k_BT_c)^3}{(k_BT_c)^3} \\
&= N_0 + N\left(\frac{T}{T_c}\right)^3.
\end{aligned}$$

Es ist also

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 .$$

Formelsammlung

- Bose-Einstein-Funktionen

$$
\begin{aligned}
g_\alpha(e^{-\lambda_2}) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{e^{x+\lambda_2}-1} \\
\frac{\partial}{\partial\lambda} g_\alpha(e^{-\lambda_2}) &= -g_{\alpha-1}(e^{-\lambda_2})
\end{aligned}
$$

- Gamma-Funktion

$$
\Gamma(n+1) = \int_0^\infty dx x^n e^{-x} = n! \qquad (n \in \mathbf{N})
$$

- Fermi-Dirac-Funktionen

$$
f_\alpha(e^{-\lambda_2}) = \int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{e^{x+\lambda_2}+1}
$$