Blatt 5
15.11.2012

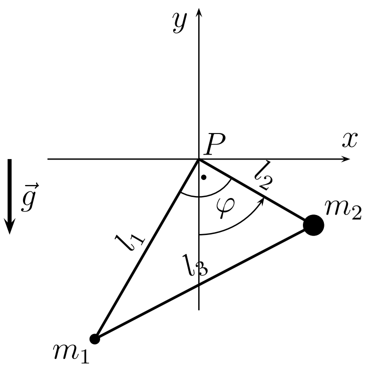
Musterlösungen

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Prof. Dr. G. Alber
MSc Nenad Balaneskovic

Die Lagrange Methode zweiter und erster Art

1.



Gegeben ist eine Anordnung wie in der Skizze dargestellt, in der zwei Massen m_1 und m_2 mittels masseloser starrer Stangen mit Längen l_1 und l_2 mit einem Aufhängepunkt verbunden sind. Die beiden Massen sind über eine weitere starre massenlose Stange der Länge $l_3 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ miteinander verbunden. Die Anordnung kann um den Aufhängepunkt P im Schwerefeld der Erde schwingen.

(a) Wie lauten die Zwangsbedingungen ?
Es gibt die folgenden drei Zwangsbedingungen $F_l = 0$, $l = 1, 2, 3$:

$$F_1 = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 \tag{1}$$
$$F_2 = x_2^2 + y_2^2 - l_2^2 \tag{2}$$
$$F_3 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l_3^2. \tag{3}$$

(b) Stellen Sie die Lagrange Gleichungen zweiter Art auf.
Wir führen die verallgemeinerte Koordinate φ ein, so dass $\vec{x}_1 = -l_1 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = l_2 \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}$. Damit lautet die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}^2 - (-m_1 g l_1 \sin\varphi - m_2 g l_2 \cos\varphi) \tag{4}$$

und es folgt die Bewegungsgleichung

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\varphi} = g(m_1 l_1 \cos\varphi - m_2 l_2 \sin\varphi). \tag{5}$$

(c) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspositionen und die Schwingungsfrequenz um die stabile Gleichgewichtslage.
Eine Gleichgewichtsposition liegt vor, falls der Winkel φ die Bedingung

$$\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} = \tan\varphi \tag{6}$$

erfüllt. Diese Bedingung wird von den zwei Winkeln $\varphi_G = \arctan(m_1 l_1/m_2 l_2)$ $(0 \leq \varphi_G \leq \pi/2)$ und $\varphi_G + \pi$ erfüllt. Wir interessieren uns nur für das stabile Gleichgewicht in φ_G und entwickeln die Bewegungsgleichung für $\varphi = \varphi_G + \delta$:

$$\begin{aligned}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\delta} &= g[m_1 l_1(\cos\varphi_G - \delta\sin\varphi_G + \mathcal{O}(\delta^2)) \\ &\qquad - m_2 l_2(\sin\varphi_G + \delta\cos\varphi_G + \mathcal{O}(\delta^2))] \\ &\approx -g(m_1 l_1 \sin\varphi_G + m_2 l_2 \cos\varphi_G)\delta \\ &= -\delta g\sqrt{(m_1 l_1)^2 + (m_2 l_2)^2}.\end{aligned} \tag{7}$$

Wir erhalten also eine Schwingung mit Frequenz $\omega^2 = g\sqrt{(m_1 l_1)^2 + (m_2 l_2)^2}/(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)$. (Für die instabile Gleichgewichtsposition $\varphi_G + \pi$ ergibt sich in der obigen Enwticklung auf der rechten Seite der zusätzliche Faktor -1, es gibt keine Schwingung sondern eine Bewegung weg von der instabilen Position.)

(d) Bestimmen Sie die Zwangskräfte, die die Stangen im stabilen Gleichgewicht auf die Massenpunkte m_1 und m_2 ausüben.

Die Lagrangegleichungen erster Art lauten

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i(t) = \vec{Z}_i(t) - \nabla_i U(\vec{x}_j(t), t), \tag{8}$$

wobei $\vec{Z}_i(t) = \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha(t)\nabla_i F_\alpha(\vec{x}_j(t), t)$ und es ergibt sich in unserem Fall

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = m_1\begin{pmatrix}0\\-g\end{pmatrix} + 2\lambda_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + 2\lambda_3\begin{pmatrix}x_1 - x_2\\y_1 - y_2\end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = m_2\begin{pmatrix}0\\-g\end{pmatrix} + 2\lambda_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} - 2\lambda_3\begin{pmatrix}x_1 - x_2\\y_1 - y_2\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Es folgt

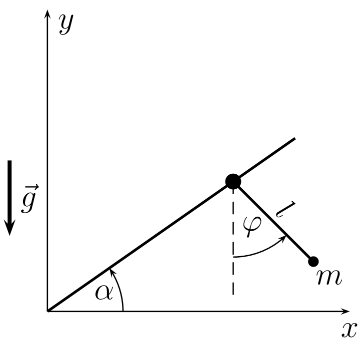
$$\lambda_1 = -\frac{m_1 g(m_1 + m_2)}{2\sqrt{(m_1 l_1)^2 + (m_2 l_2)^2}} \tag{11}$$

$$\lambda_2 = -\frac{m_2 g(m_1 + m_2)}{2\sqrt{(m_1 l_1)^2 + (m_2 l_2)^2}} \tag{12}$$

$$\lambda_3 = \frac{m_1 m_2 g}{2\sqrt{(m_1 l_1)^2 + (m_2 l_2)^2}}. \tag{13}$$

Auf Teilchen m_1 wirkt die Zwangskraft $\vec{Z}_1 = 2\lambda_1 l_1 \vec{e}_1 + 2\lambda_3 l_3 \vec{e}_3$ und auf Teilchen m_2 die Zwangskraft $\vec{Z}_2 = 2\lambda_2 l_2 \vec{e}_2 - 2\lambda_3 l_3 \vec{e}_3$. Auf Stange 3 drückt die Kraft $2\lambda_3 l_3$ während an den Stangen 1 und 2 mit der Kraft $-\lambda_1 l_1$ bzw. $-\lambda_2 l_2$ gezogen wird.

2.



Ein Massenpunkt der Masse M gleite unter dem Einfluß der Schwerkraft auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α gegen die Horizontale. An diesem Massenpunkt sei ein Massenpunkt der Masse m mittels eines masselosen Fadens der Länge l befestigt.

(a) Wie lauten die Zwangsbedingungen ?

Wir bezeichnen die Koordinaten der Masse M mit $\vec{X} = (X, Y)$ und die der Masse m mit $\vec{x} = (x, y)$. Es gibt die folgenden zwei Zwangsbedingungen:

$$F_1 = Y - X \tan\alpha = 0 \tag{14}$$
$$F_2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 - l^2 = 0. \tag{15}$$

(b) Stellen Sie die Lagrange Gleichungen zweiter Art auf.

Mit $\vec{X} = s(\cos\alpha, \sin\alpha)$ und $\vec{x} = s(\cos\alpha, \sin\alpha) + l(\sin\varphi, -\cos\varphi)$ erhalten wir die Lagrangefunktion

$$L(s, \varphi, \dot{s}, \dot{\varphi}) = \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\big(\dot{s}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{s}\cos(\alpha-\varphi)\big) - \big(Mgs\sin\alpha + mg(s\sin\alpha - l\cos\varphi)\big). \tag{16}$$

Es folgt das folgende System gekoppelter Differentialgleichungen,

$$\ddot{s} = -g\sin\alpha - \frac{ml}{m+M}\big(\ddot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin(\alpha-\varphi)\big) \tag{17}$$
$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{\ddot{s}}{l}\cos(\alpha-\varphi). \tag{18}$$

(c) Zeigen Sie, dass es Bahnkurven gibt, für die die Masse m einen zeitunabhängigen Auslenkwinkel aus der Vertikalen aufweist. Bestimmen Sie diese Bahnkurven. Lösen Sie die Bewegunggleichungen für kleine Schwingungen des Massenpunktes m um diesen Auslenkwinkel im Grenzfall $m \ll M$.

Ist $\varphi(t)$ konstant, folgt daraus die Konstanz von $\ddot{s}(t) = -g\sin\alpha$. Einsetzen in (18) verifiziert $\ddot{\varphi} = 0$, falls $\varphi = \alpha + \gamma\pi$, $\gamma \in \{0, 1\}$. Wir haben somit zwei Lösungen der Bewegungsgleichungen gefunden, sie lauten

$$\begin{aligned} s(t) &= s(0) + \dot{s}(0)t - \frac{g\sin\alpha}{2}t^2 \\ \varphi(t) &= \alpha + \gamma\pi. \end{aligned} \tag{19}$$

Einsetzen von (17) in (18) liefert eine Differentialgleichung für φ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\big(\sin\varphi - \sin\alpha\cos(\alpha-\varphi)\big) - \frac{m}{m+M}\big(\ddot{\varphi}\cos^2(\alpha-\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin(\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\varphi)\big) = 0. \tag{20}$$

Wegen $M \gg m$ vernachlässigen wir Terme mit dem Faktor $m/(m+M)$ und erhalten mit $\varphi = \alpha + \gamma\pi + \delta$

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\big(\sin\varphi - \sin\alpha\cos(\alpha-\varphi)\big) \\ &= \ddot{\delta} + (-1)^\gamma\frac{g}{l}\cos\alpha\sin\delta \\ &\approx \ddot{\delta} + (-1)^\gamma\delta\cdot\frac{g}{l}\cos\alpha, \end{aligned} \tag{21}$$

also eine Schwingung mit Frequenz $\omega^2 = \frac{g}{l}\cos\alpha$ für $\gamma = 0$. Die $\gamma = 0$ Lösung ist also wie zu erwarten die stabile Gleichgewichtslage.

(d) Bestimmen Sie für den Fall aus Aufgabe c die Zwangskräfte, die auf die beiden Massenpunkte wirken.

Wir erhalten die Zwangskräfte aus

$$M\ddot{\vec{X}}(t) = \vec{Z}(t) - Mg\vec{e}_y \qquad , \vec{Z}(t) = \lambda_1(t)\begin{pmatrix} -\tan\alpha \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2(t)2(\vec{X} - \vec{x}) \tag{22}$$

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{z}(t) - mg\vec{e}_y \qquad , \vec{z}(t) = \lambda_1(t)\vec{0} + \lambda_2(t)(-2)(\vec{X} - \vec{x}). \tag{23}$$

Wir beschränken uns auf den Fall $\varphi(t) = \alpha$ und erhalten

$$-Mg\sin\alpha\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \lambda_1(t)\begin{pmatrix} -\tan\alpha \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda_2(t)2l\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} - Mg\vec{e}_y \tag{24}$$

$$-mg\sin\alpha\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \lambda_1(t)\vec{0} + \lambda_2(t)2l\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} - mg\vec{e}_y \tag{25}$$

und somit $\lambda_1 = g(m+M)\cos^2\alpha$ und $\lambda_2 = -\frac{g}{l}\frac{m}{2}\cos\alpha$. Auf Teilchen M wirken somit die Zwangskräfte

$$g(m+M)\cos\alpha\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ ausgeübt von Zwangsbedingung 1} \tag{26}$$

und

$$gm\cos\alpha\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ausgeübt von Zwangsbedingung 2.} \tag{27}$$

Auf Teilchen m wirkt die Zwangskraft

$$-gm\cos\alpha\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ ausgeübt von Zwangsbedingung 2.} \tag{28}$$

3. Zeigen Sie, dass für eine Lagrangefunktion der Form

$$L(q,\dot{q},t) = \sum_{j=1}^{f}\dot{q}^j\frac{\partial f}{\partial q^j}(q,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(q,t), \tag{29}$$

$f(q,t)$ beliebig (2× stetig partiell differenzierbar) gilt:
Jede stetig differenzierbare Bahnkurve $q^j(t)$, $j = 1,\ldots,f$ erfüllt die Euler-Lagrange Gleichungen.
Wie deuten Sie dieses Ergebnis ?

Wir erhalten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i} = \sum_j\frac{\partial^2 f}{\partial q^j\partial q^i}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial q^i}. \tag{30}$$

Dieser Ausdruck ist gleich $\frac{\partial L}{\partial q^i}$, wenn man die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen berücksichtigt. Man kann (29) also zu jeder Lagrangefunktion hinzuaddieren, ohne dass sich die Bahnkurven ändern.

4. $\mathbf{Hausaufgabe}$: $\mathbf{Lagrange\,1\,or\,Lagrange\,2}$, $\mathbf{that\,is\,the\,question}$!

(a) Zwei Massen m_1 und m_2 bewegen sich unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungslos auf einem Keil. Sie seien durch einen masselosen Faden der Länge $l = l_1 + l_2$ miteinander verbunden (s. Abb. 1).

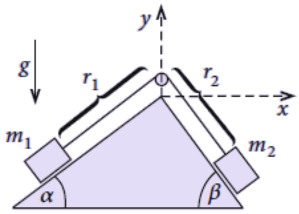


Abbildung 1: Zwei Massen und ein Keil.

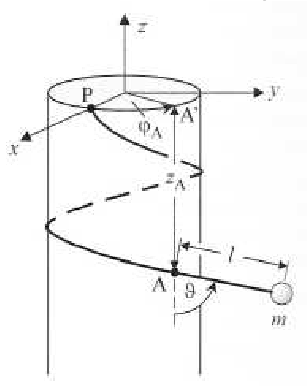


Abbildung 2: Der Seilball.

i. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen. Von welchem Typ sind diese? Wie viele Freiheitsgrade s besitzt das System?
Es gibt fünf holonom-skleronome Zwangsbedingungen:

$$
\begin{aligned}
i)\, z_1 &= 0;\\
ii)\, z_2 &= 0;\\
iii)\, (-y_1)/(-x_1) &= \tan\alpha;\\
iv)\, (-y_2)/(-x_2) &= \tan\beta;\\
v)\, r_1 + r_2 &= l.
\end{aligned}
$$

Damit besitzt das System $s = 2 \cdot 3 - 5 = 1$ Freiheitsgrade.

ii. Wählen Sie passende generalisierte Koordinaten. Geben Sie die Transformationsformeln an und formulieren Sie die Lagrange-Funktion.
$s = 1 \Longrightarrow 1$ generalisierte Koordinate, z. B. $q = r_1$. Transformationsformeln:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 0;\\
z_2 &= 0;\\
x_1 &= -q\cos\alpha;\\
y_1 &= -q\sin\alpha;\\
x_2 &= (l-q)\cos\beta;\\
y_2 &= -(l-q)\sin\beta.
\end{aligned}
$$

Kinetische Energie:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) =\\
&= \frac{m_1}{2}\dot{q}^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + \frac{m_2}{2}\dot{q}^2\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) =\\
&= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{q}^2.
\end{aligned}
$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = \\ &= -m_1 g \cdot q \sin\alpha - m_2 g \cdot (l-q) \sin\beta . \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &= T - V = \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) \dot{q}^2 + m_1 g \cdot q \sin\alpha + m_2 g \cdot (l-q) \sin\beta . \end{aligned}$$

iii. Stellen Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese. Bestimmen Sie $r_1(t)$ mit den Anfangsbedingungen: $r_1(t=0) = r_0;\ \dot{r_1}(t=0) = 0$. Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen auf.
Lagrange'sche Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= \left(m_1 + m_2\right) \ddot{q} \overset{!}{=} \frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta) g \\ \Longrightarrow \ddot{q} &= \frac{(m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta)}{(m_1 + m_2)} g \text{ ('verzögerter' freier Fall).} \end{aligned}$$

Integration der Bewegungsgleichungen unter Verwendung der Anfangsbedingungen liefert:

$$q(t) = r_1 = \frac{1}{2}\frac{(m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta)}{(m_1 + m_2)} g t^2 + r_0 .$$

System im Gleichgewicht heißt:

$$\begin{aligned} q(t) &= \text{const} \\ &\Longrightarrow 0 = m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta \\ &\Longrightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} . \end{aligned}$$

iv. Benutzen Sie die Zwangsbedingung der 'konstanten Fadenlänge' **nicht** als holonome Zwangsbedingung zur Eliminierung von Variablen. Benutzen Sie stattdessen einen Lagrange'schen Multiplikator λ zur Festlegung der 'Fadenspannung'. Wie groß ist diese im Gleichgewicht?
Jetzt wird die 5. Zwangsbedingung aus der Teilaufgabe (i) nicht zur Eliminierung der Variablen benutzt. Damit werden zwei generalisierte Koordinaten, $q_1 = r_1$ und $q_2 = r_2$, benötigt. Aus $r_1 + r_2 = l = \text{const}$ folgt dann:

$$\begin{aligned} dq_1 + dq_2 &= 0 \\ \Longrightarrow a_{11} &= a_{12} = 1 . \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ für die generalisierten Zwangskräfte:

$$Q_1 = Q_2 = \lambda .$$

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2\right) + m_1 g \cdot q_1 \mathrm{sin}\alpha + m_2 q_2 \mathrm{sin}\beta.$$

$\Longrightarrow$ Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= Q_i = \lambda,\ i = 1,\,2 \\ \Longrightarrow m_1\ddot{q}_1 - m_1 g \mathrm{sin}\alpha &= \lambda \\ m_2\ddot{q}_2 - m_2 g \mathrm{sin}\beta &= \lambda. \end{aligned}$$

Aus der 5. Zwangsbedingung der Teilaufgabe (i) folgt:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0 &\Longrightarrow \ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2 \\ \Longrightarrow \ddot{q}_1 - g\mathrm{sin}\alpha &= \frac{\lambda}{m_1} \\ -\ddot{q}_1 - g\mathrm{sin}\beta &= \frac{\lambda}{m_2} \\ \Longrightarrow -g(\mathrm{sin}\alpha + \mathrm{sin}\beta) &= \lambda\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right). \end{aligned}$$

Damit ist die Zwangskraft 'Fadenspannung':

$$Q = \lambda = -g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mathrm{sin}\alpha + \mathrm{sin}\beta).$$

Im Gleichgewicht gilt (s. auch die letzte Teilaufgabe (iii) oben):

$$\begin{aligned} \frac{m_2}{m_1} &= \frac{\mathrm{sin}\alpha}{\mathrm{sin}\beta} \\ \Longrightarrow \mathrm{sin}\alpha + \mathrm{sin}\beta &= \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\mathrm{sin}\alpha \\ &= \frac{m_1 + m_2}{m_2}\mathrm{sin}\alpha. \end{aligned}$$

Damit ist die Fadenspannung im Gleichgewicht:

$$Q_0 = -m_1 g \mathrm{sin}\alpha = -m_2 g \mathrm{sin}\beta.$$

(b) Am oberen Ende einer senkrecht stehenden Stange mit Radius R wird das masselose Seil im Punkt P befestigt. Am anderen Seilende ist ein Ball der Masse m befestigt. Das Seil wird um einen bestimmten Winkel θ ausgelenkt und wickelt sich nach dem Stoß des Balles um die Stange auf. Die Ballbewegung wird mit den Koordinaten $l,\ \theta,\ \varphi_A,\ z_A$ beschrieben (A ist der Ablösepunkt des Seils von der Stange, s. Abb. 2).

i. Bestimmen Sie die Zwangsbedingungen. Ist die Lagrange-Methode 2. Art anwendbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
Die Aufwicklung des Seils und die Bewegung des Balles werden durch folgende vier Koordinaten beschrieben:

$l(t)$: Länge des noch nicht aufgewickelten Seiles.

$\theta(t)$: Winkel zwischen der Vertikalen und dem noch nicht aufgewickelten Seil im Pkt. A.

$\varphi_A(t)$: Winkel zwischen x-Achse und Projektion A' des Punktes A auf die (x,y)-Ebene.

$z_A(t)$: z-Koordinate des Ablösepunktes A.

Bei konstantem Winkel θ bewegt sich der Ablösepunkt A beim Aufwickeln des Seiles parallel zum freien Seilenende auf einer Schraubenlinie. Bei einer allgemeinen Bewegung ist der Winkel θ nur in einem infinitesimalen Zeitintervall dt konstant, in dem sich die freie Seitenlänge um dl verkürzt und sich der Ablösepunkt in Abb. 3 - parallel zum freien Seilenende - auf der Hypothenuse bewegt. Nach dem infinitesimalen Dreieck in Abb. 3 lauten die differentiellen Nebenbedingungen

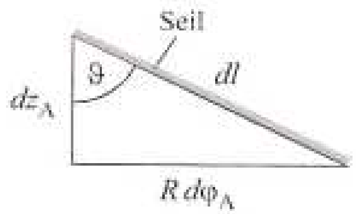


Abbildung 3: Seitenansicht des Seils am Ablösepunkt.

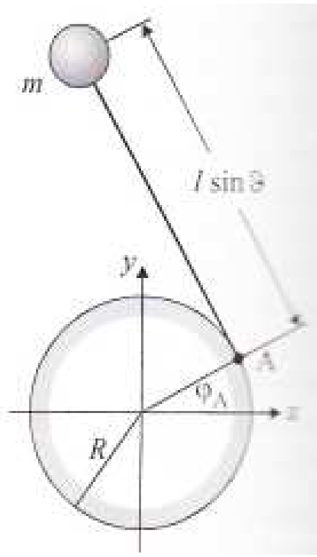


Abbildung 4: Aufsicht auf die Stange und das freie Seilende mit dem Ball der Masse m.

$$\sin\theta = -\frac{R \cdot d\varphi_A}{dl} \Leftrightarrow R \cdot d\varphi_A + \sin\theta dl = 0 \tag{31}$$

$$\cos\theta = \frac{dz_A}{dl} \Leftrightarrow dz_A - \cos\theta dl = 0 \tag{32}$$

Da die Nebenbedingungen differentiell sind, muss der Hamiltonsche Extremalprinzip durch Lagrange-Multiplikatoren additiv erweitert werden, weswegen man Lagrange-Gleichungen 2. Art nicht in der üblichen Form anwenden darf (s. auch Fließbach, Bd. 1, Kapitel 9 oder Nolting, Bd. 2, Punkt 1.3.3). Man kann aber die Zwangsbedingungen nutzen, um bestimmte generalisierte Koordinaten aus den Lagrange-Gleichungen zu eliminieren, was wir in der nächsten Teilaufgabe tun werden.

ii. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Balles auf und zeigen Sie, dass $l\dot{l}\sin^3\theta$ eine Erhaltungsgröße ist.
Die Transformationsgleichungen zwischen den kartesischen Ballkoordinaten und den vier generalisierten Koordinaten lauten (s. Abb. 4 oben):

$$x = R\cos\varphi_A - l\sin\theta\sin\varphi_A \tag{33}$$

$$y = R\sin\varphi_A + l\sin\theta\cos\varphi_A \tag{34}$$

$$z = z_A - l\cos\theta \tag{35}$$

und die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}[\dot{z_A}^2 + \dot{l}^2 + (l\dot{\theta})^2 + (R^2 + l^2\sin^2\theta)\dot{\varphi_A}^2 +$$
$$2R\dot{\varphi}_A(\dot{l}\sin\theta + l\dot{\theta}\cos\theta) - 2\dot{z}_A(\dot{l}\cos\theta - l\dot{\theta}\sin\theta)] - mg(z_A - l\cos\theta).$$

Mit den Abkürzungen

$$L_{q_j} := \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \tag{36}$$

lauten die Lagrange-Gleichungen 1. Art

$$L_{\varphi_A} = R\lambda_1 \ , \ L_{z_A} = \lambda_2 \tag{37}$$
$$L_l = \sin\theta\lambda_1 - \cos\theta\lambda_2 \ , \ L_\theta = 0. \tag{38}$$

Mit den aus den Gln (33)-(35) folgenden Nebenbedingungen

$$\dot{\varphi}_A = -\frac{1}{R}\dot{l}\sin\theta \ , \dot{z}_A = \dot{l}\cos\theta \tag{39}$$

und ihren zeitlichen Ableitungen

$$\ddot{\varphi}_A = -\frac{1}{R}(\ddot{l}\sin\theta + \dot{l}\dot{\theta}\cos\theta) \ , \ddot{z}_A = \ddot{l}\cos\theta - \dot{l}\dot{\theta}\sin\theta$$

lassen sich die Koordinaten φ_A und z_A aus den Lagrange-Gleichungen eliminieren. Die Differentialgleichung

$$\frac{1}{R}\sin\theta \cdot L_{\varphi_A} - \cos\theta \cdot L_{z_A} = L_l$$

liefert zusammen mit den Differentialgleichungen (38) und (33)-(34) das gesuchte Differentialgleichungssystem:

$$l\ddot{l}\sin\theta + \dot{l}^2\sin\theta + 3l\dot{l}\dot{\theta}\cos\theta = 0 \tag{40}$$
$$l\ddot{\theta} + \dot{l}\dot{\theta} - \frac{l}{R^2}\dot{l}^2\sin^3\theta\cos\theta + g\sin\theta = 0 \tag{41}$$
$$\dot{\varphi}_A + \frac{1}{R}\dot{l}\sin\theta = 0 \tag{42}$$
$$\dot{z}_A - \dot{l}\cos\theta \tag{43}$$

Die Bewegung des Balles wird durch die sechs Anfangsbedingungen l_0, $\dot{l}_0$, θ_0, $\dot{\theta}_0$ und φ_{A_0}, z_{A_0} festgelegt.
Wenn der Seilball kein ebenes Pendel bildet ($\dot{l}_0 < 0$), sondern sich aufwickelt, ist der Ausdruck $l\dot{l}\sin\theta$ stets ungleich Null. Division der Gl. (40) durch diesen Ausdruck (was wegen $l = const$ automatisch auf $G := l\dot{l}\sin^3\theta = 0$ führt, obwohl die Division selbst, streng genommen, mathematisch verboten ist) führt auf

$$\frac{\ddot{l}}{\dot{l}} + \frac{\dot{l}}{l} + 3\dot{\theta}\cot\theta = 0.$$

Wegen der Variablentrennung ist eine Integration möglich:

$$\ln\frac{\dot{l}}{\dot{l}_0} + \ln\frac{l}{l_0} + 3\ln(\sin\theta) = \ln\frac{l\dot{l}\sin^3\theta}{l_0\dot{l}_0} = \text{const}.$$

Daraus folgt $l\dot{l}\sin^3\theta =: G =$ Erhaltungsgröße.