22.02.2013

Klausur

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. G. Alber
MSc Nenad Balanesković

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte	10	12	10	32
Erreicht				
Note				

Name: ____________________

Vorname: __________________

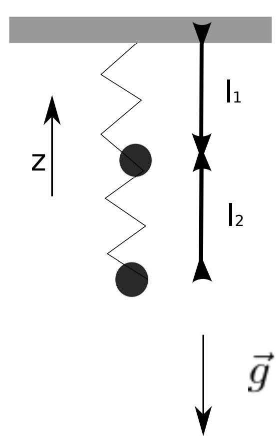
Matr.-Nr.: _________________

- Schreiben Sie bitte Ihren Namen und Vornamen in GROSSBUCHSTABEN.
- Beginnen Sie bitte jede neue Aufgabe auf einem separaten Blatt.

Aufgabe 1

Zwei Massenpunkte mit Massen m_1 und m_2 hängen an zwei Federn (mit Federkonstanten k_1 und k_2 und Gleichgewichtslängen l_1 und l_2) unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes charakterisiert durch die Beschleunigung $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ $(g > 0)$ (siehe Skizze). Die Gleichgewichtslängen l_1 und l_2 gelten in Abwesenheit eines homogenen Schwerefeldes.

1. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion dieses dynamischen Systems. **(2 Punkte)**
2. Bestimmen Sie die stabilen Gleichgewichtspositionen der beiden Massenpunkte im homogenen Schwerefeld. **(2 Punkte)**
3. Bestimmen Sie die Eigenmoden dieses dynamischen Systems (Eigenfrequenzen und Eigenvektoren) und die allgemeinste Lösung der Bewegungsgleichungen. **(4 Punkte)**
4. Betrachten Sie den Spezialfall $m_1 = m_2$ und $k_1 = k_2$. Wie lauten die entsprechenden Eigenfrequenzen und Eigenvektoren, die die Moden bestimmen? **(2 Punkte)**



Aufgabe 2

Ein homogener (unendlich) dünner Stab der Länge $2l$ (Masse M, lineare Massendichte $\rho = M/(2l)$) gleitet reibungsfrei im homogenen Schwerefeld (konstante Beschleunigung $\vec{g} = -g\vec{e}_y,\ g > 0$) an einer Wand ab (siehe Skizze).

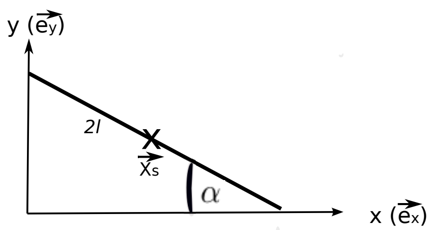
1. Bestimmen Sie die Komponenten des Trägheitstensors dieses Stabes in Bezug auf den Massenschwerpunkt $\vec{x}_s$ im inertialen Koordinatensystem I mit Koordinatenachseneinheitsvektoren $\{\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z\}$ (siehe Skizze).
   $Hinweis$: Verwenden Sie den Winkel $\alpha(t)$ als generalisierte Koordinate. **(3 Punkte)**

2. Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente dieses Stabes und die Komponenten der Hauptträgheitsachsen im inertialen Koordinatensystem I. **(2 Punkte)**

3. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion (2. Art) als Funktion der generalisierten Variablen α und $\dot{\alpha}$ für den Fall, dass die instantane Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ immer in z-Richtung (orthogonal zur Zeichenebene in der Skizze) zeigt. **(3 Punkte)**

4. Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen dieses dynamischen Systems. Ist die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße? **(2 Punkte)**

5. Durch welchen Integralausdruck lässt sich $t(\alpha)$ bestimmen? t ist die Newtonsche Zeit. **(2 Punkte)**



Aufgabe 3

Ein Massenpunkt der Masse m bewegt sich nicht relativistisch im homogenen Schwerefeld (konstante Beschleunigung $\vec{g}$) im dreidimensionalen Raum.

1. Wie lautet die Hamilton-Funktion dieses dynamischen Systems? **(2 Punkte)**

2. Lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für allgemeine Anfangsbedingungen. **(2 Punkte)**

3. Betrachten Sie die Erzeugende
$$S(\vec{P},\ \vec{x},\ t) = \vec{P}\cdot\vec{x} + t(m\vec{g}\cdot\vec{x} - \frac{\vec{P}^2}{2m}) - \frac{\vec{P}\cdot\vec{g}}{2}t^2 - m\vec{g}^2\frac{t^3}{6}$$
einer kanonischen Transformation ($\vec{X}(\vec{p},\ \vec{x},\ t)$,$\vec{P}(\vec{p},\ \vec{x},\ t)$). Bestimmen Sie die von $S(\vec{P},\ \vec{x},\ t)$ erzeugte kanonische Transformation und die $H(\vec{p},\ \vec{x})$ zugeordnete neue Hamilton-Funktion $K(\vec{P},\ \vec{X},\ t)$. Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung der transformierten Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. **(6 Punkte)**

Viel Erfolg!