

## Versuch 3.5: Austrittsarbeit von Elektronen

### Vorbereitung:

Freies Elektronengas, Potenzialtopf, Fermi-Statistik, Austritts-Arbeits-Erniedrigung, Methoden zur Messung der Austritts-Arbeit und des Kontaktpotenzials, Glüh-Emission, Schottky-Effekt, Dioden-Kennlinie, Raumladung, Schrottrauschen, Richtungs- und Energie-Verteilung der emittierten Elektronen.

Literatur:		Standort
<i>C. Kittel</i>	Einführung in die Festkörperphysik	L B S
<i>G. Herrmann, H. Wagener</i>	Die Oxydkathode	L B S
<i>Simonyi</i>	Physikalische Elektronik	L B S

### Versuchsanleitung

Die Austrittsarbeit eines glühenden Wolframdrahtes in einer Vakuumdiode wird mit zwei verschiedenen Methoden gemessen. Die Diode hat einen coaxialen Aufbau, wobei die Anode den Glühdraht umfasst. Um Randeffekte zu vermeiden, vorallem aber um den Einfluss der unterschiedlichen Startenergien der Elektronen aufgrund der über die Kathode abfallenden Heizspannung zu minimieren, ist die Anode in drei Teile unterteilt, wobei die beiden äußeren gemeinsam kontaktiert sind und die mittlere separat. Je nach Messprinzip wird der Anodenstrom nur von der inneren oder von allen drei Anoden gemeinsam gemessen.

### Strom-Spannungs Kennlinie

Gemäß Gl.(1) ist der Elektronenstrom  $\vec{j}$  durch eine Vakuum-Röhre immer mit einer Raumladung  $\rho$  verknüpft. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zur Stromleitung durch Metalle oder durch Plasmen.

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (1)$$

Für eine vorgegebene Elektroden-Geometrie und für vorgegebene Elektroden-Potenziale können elektrische Feldverteilung, Verteilung der Raumladung und deren Geschwindigkeitsfeld nur gemeinsam mit Hilfe der Poisson Gleichung (2) gelöst werden.

$$\Delta U(\vec{r}) = - \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (2)$$

Eine Lösung kann im Allgemeinen nur numerisch erhalten werden, indem iterativ das Feld für vorgegebene Bahnen berechnet wird und dann die Elektronenbahnen, die sich für dieses Feld ergeben. Die Iteration muss dann solange wiederholt werden, bis sich eine stabile

Lösung ergibt (sofern das Verfahren konvergiert). Sind die Elektroden parallele Ebenen, konzentrische Zylinder oder konzentrische Kugeln, so wird das Problem sehr viel einfacher, da es sich in entsprechenden Koordinaten dann eindimensional beschreiben lässt.

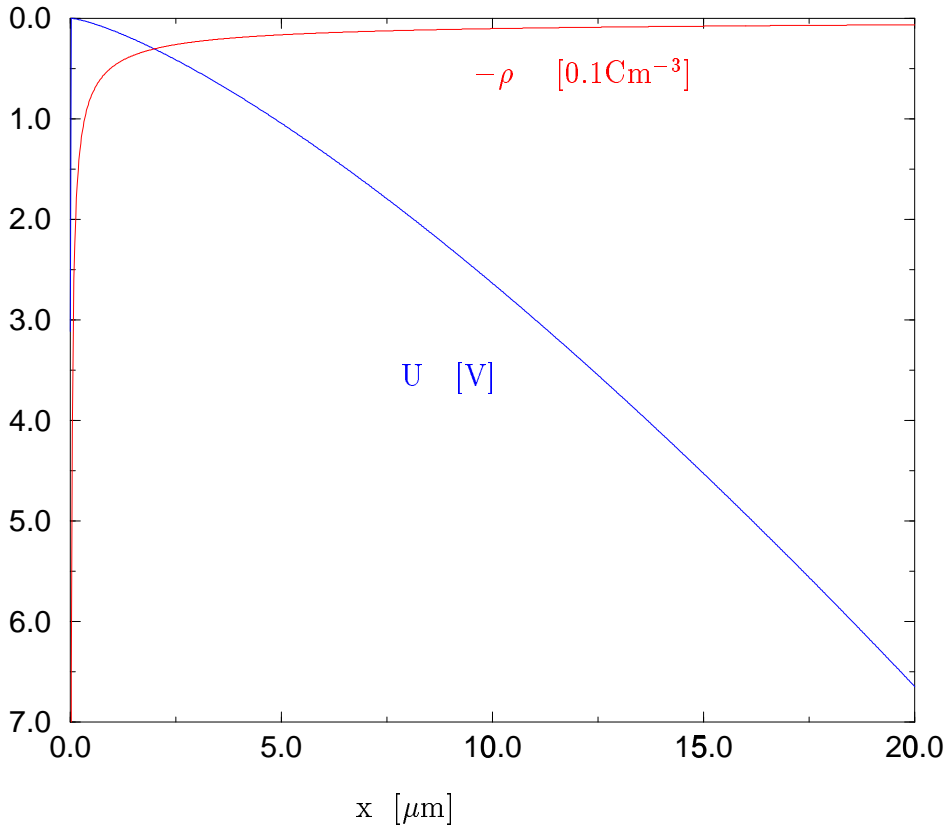


Abb. 1: Verlauf von Potenzial und Ladungsdichte vor einer ebenen Kathode für die Stromdichte  $j = 10 \text{ A cm}^{-2}$ . Hier ist die Startenergie 0 eV gewählt. Berechnung gemäß (4).

Im Fall der ebenen Diode wird aus (2) unter Verwendung von (1)

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = \frac{-j}{\varepsilon_0 v(x)} = \frac{-j}{\varepsilon_0 \sqrt{2eU/m_e}} \quad (3)$$

Diese DGL für  $U(x)$  lässt sich durch den Ansatz  $U(x) = A \cdot x^\lambda$  lösen für den Wert  $\lambda = 4/3$ . Dieser Ansatz enthält bereits die Randbedingungen  $U(0) = 0$  und  $E(0) = -U'(0) = 0$ . Für raumladungsbegrenzte Emission muss die Feldstärke an der Kathode tatsächlich verschwinden, andernfalls würden je nach Vorzeichen alle emittierten Elektronen abgesaugt (Sättigungsstrom) oder wieder in die Kathode zurückgedrängt, sofern wir von der geringen thermischen Startenergie absehen. Nach dieser Lösung ergibt sich direkt an der Kathode  $U''(0) \sim \rho(0) \rightarrow -\infty$ . Setzen wir den Ansatz in (3) ein und lösen nach  $j$  auf, so erhalten wir das Child-Langmuir'sche  $U^{3/2}$ -Gesetz:

$$j = \frac{4\varepsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{U^{3/2}}{d^2} \quad (4)$$

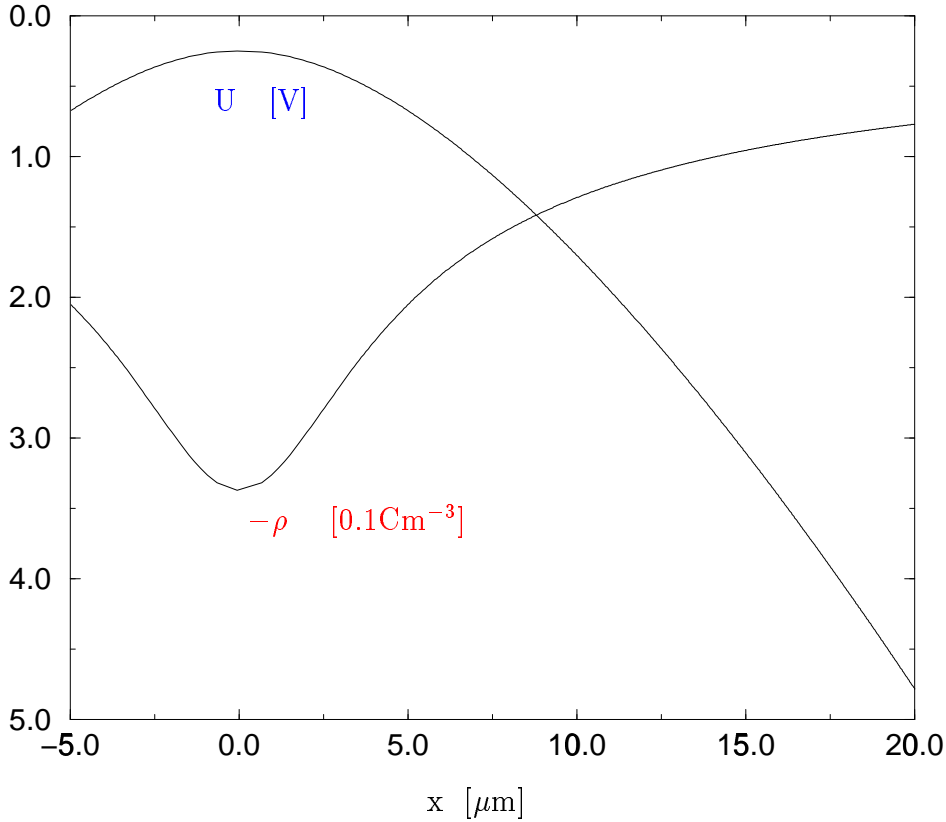


Abb. 2: Verlauf von Potenzial und Ladungsdichte vor einer ebenen Kathode für die Stromdichte  $j = 10 \text{ A cm}^{-2}$ . Hier ist die Elektronen-Energie im Potenzialmaximum zu  $0.25 \text{ eV}$  gewählt. Berechnung gemäß (6).

Da die Poisson Gleichung eine DGL zweiter Ordnung darstellt, benötigt man für eine allgemeine Lösung zwei voneinander unabhängige spezielle Lösungen. Im Fall der raumladungsbegrenzten Emission aus einer ebenen Diode haben wir mit (4) also Glück gehabt, dass unser Ansatz zu unseren Randwerten passt. Mit etwas höherem Rechenaufwand kann man sich aber für die ebene DGL (3) auch die allgemeine Lösung analytisch beschaffen.

Dafür nutzen wir aus, dass die DGL zweiter Ordnung (3) übergeführt werden kann in eine DGL erster Ordnung

$$U^{1/2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a \quad ; \quad a = \left| \frac{j}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} \right| \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2\sqrt{a\sqrt{U} + C}$$

mit der Integrationskonstanten  $C$ . Diese DGL erster Ordnung kann direkt integriert werden.

$$x - x_0 = \frac{2}{3a^2} (a\sqrt{U} - 2C)(a\sqrt{U} + C)^{1/2} \quad (6)$$

Quadriert man (6), so kann man diese Gleichung nach  $U(x)$  auflösen, was allerdings auf eine Gleichung dritten Grades führt (kardanische Formel). Setzen wir  $C = 0$  und  $x_0 = 0$ , so ist in (6) wieder die Lösung (4) enthalten. Die Bedeutung der Integrationskonstanten  $C$  hängt von

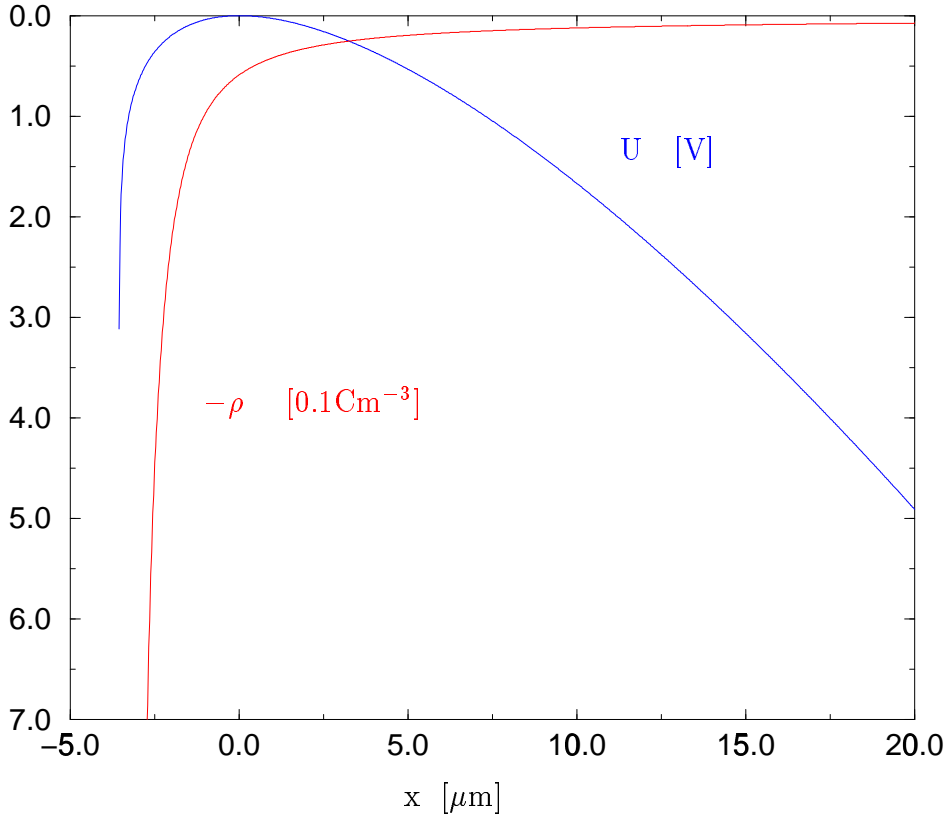


Abb. 3: Verlauf von Potenzial und Ladungsdichte vor einer ebenen Kathode für die Stromdichte  $j = 10 \text{ A cm}^{-2}$ . Hier ist eine thermische Energie-Verteilung der Elektronen für  $T = 3000 \text{ K}$  gewählt. Numerische Integration von (3).

ihrem Vorzeichen ab. Bei positivem Vorzeichen ist  $E_0 = 2\sqrt{C}$  die Feldstärke an dem Ort, an dem das Potenzial und damit auch die Elektronen-Geschwindigkeit verschwinden. Bei negativem Vorzeichen ist  $U_0 = C^2/a^2$  der Wert des Potenzialmaximums. Für negatives  $C$  wählt man sinnvollerweise  $z_0 = \frac{4}{3a^2}C^{3/2}$ , damit der Ursprung von  $z$  im Potenzialmaximum liegt.

In den Abb. 1, 2 und 3 werden Potenzialverlauf und Ladungsdichte vor einer ebenen Kathode dargestellt. In den drei Fällen wird jeweils eine Stromdichte von  $j = 10 \text{ A/cm}^2$  angenommen. Abb. 1 gibt den Verlauf an ohne Startenergie der Elektronen, Abb. 2 mit fester Energie  $E_0 = \frac{1}{4} \text{ eV}$  im Potenzialminimum und Abb. 3 für eine thermische Energieverteilung mit  $T = 3000 \text{ K}$ . Im letzten Fall musste (3) numerisch integriert werden. Hier ist die Raumladung  $\rho(x)$  unsymmetrisch zu  $x = 0$ , da von links auch Strom mit negativer Gesamt-Energie gegen den Potenzialwall läuft und dort reflektiert wird. Der Ort der Kathoden-Oberfläche ist in dieser Darstellung beliebig und hängt physikalisch von der Austrittsarbeit ab, durch die bei einer vorgegebenen Temperatur die Ladungsdichte  $\rho$  an der Oberfläche definiert ist.

Für alle anderen Geometrien können Lösungen von (2) nur numerisch erhalten werden. Dies gilt auch für die zylindrische und die kugelsymmetrische Diode. In diesen beiden Fällen kann man mittels Variation der Konstanten die allgemeine ebene Lösung (6) schrittweise

auf-integrieren.

Das Ergebnis für die koaxiale zylindrische Diode kann man dann schreiben

$$j_{Anode} = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{U^{3/2}}{r_A^2 \beta^2(r_A/r_K)} \quad (7)$$

wobei die numerische Integration in der Funktion  $\beta(r_A/r_K)$  steckt. Für  $r_A/r_K \approx 1$  und  $r_A/r_K > 10$  gilt  $\beta \approx 1$ , das heisst die Gleichungen (4) und (7) stimmen dann direkt überein.

Mit Hilfe von Ähnlichkeits-Überlegungen kann gezeigt werden, dass völlig unabhängig von der Elektroden- Geometrie im Raumladungs-begrenzten Betrieb immer  $I \sim U^{3/2}$  gilt.

Bei negativer Anodenspannung verschwindet das Potenzialmaximum zwischen Kathode und Anode, auf der Anode kommen nur noch die Elektronen an, die Austrittsarbeit plus Gegenspannung überwinden können. Hier wird der Emissionsstrom durch den Boltzmann-Term bestimmt

$$j \sim \int_{v_A}^{\infty} \exp \frac{m_e v_x^2}{2 kT} v_x dv_x = \int_{eU}^{\infty} \exp \frac{W_x}{kT} dW_x \sim \exp \frac{eU}{kT} \quad , \quad (8)$$

also größerer Strom bei positiverer Anode.  $W_x = \frac{m_e}{2} v_x^2$  steht hierbei für den Anteil der kinetischen Energie, der zur Bewegungskomponente senkrecht zur Kathoden-Oberfläche gehört. Weiterhin bemerkenswert ist, dass in (9) der Boltzmann-Term mit  $v_x$  gewichtet im Integral steht; die Elektronen tragen proportional zu ihrer Häufigkeit **und** zu ihrer Geschwindigkeit  $v_x$  zum Strom bei.

Wird andererseits die Anodenspannung genügend hoch gewählt, gerät der Emissionsstrom in die Sättigung. Auch in diesem Fall verschwindet das Potenzialmaximum zwischen Kathode und Anode. Der Sättigungsstrom gehorcht dann der Richardson-Gleichung

$$j_s = AT^2 \exp \frac{-W_A}{kT} \quad , \quad (9)$$

wobei  $W_A$  die Austrittsarbeit ist und  $A$  die Sommerfeld-Konstante. Die Sommerfeld-Konstante kann durch Naturkonstanten ausgedrückt werden, jedoch ist dabei die Übereinstimmung mit Messwerten nicht gut. Besser ist es,  $W_A$  für ein Kathoden-Material experimentell zu ermitteln.

## Die Richardson-Methode

(9) kann benutzt werden, um experimentell die Austritts-Arbeit zu bestimmen. Dazu bestimmt man für verschiedene Temperaturen den Sättigungsstrom und trägt dann logarithmisch  $I_s/T^2$  über  $1/T$  auf. Aus der Steigung der dabei erhaltenen Geraden ergibt sich die Austritts-Arbeit  $W_A$ . Allerdings erhalten wir mit dieser Methode nicht den zur jeweiligen Kathoden-Temperatur gehörigen Wert der Austritts-Arbeit, sondern den von dieser Temperatur linear gegen  $T = 0$  K extrapolierten Wert. Dies können wir zeigen, indem wir  $W_A(T)$  als Taylorreihe um  $T = T_0$  bis zum linearen Glied schreiben

$$W_A(T) = W_A(T_0) + \left. \frac{dW_A}{dT} \right|_{T_0} (T - T_0) = W_A(T_0) - aT_0 + aT \quad . \quad (10)$$

Setzt man dies in (9) ein, so ergibt sich

$$j_s = A_1 T^2 \exp \frac{-W_0}{kT} \quad , \quad (11)$$

wobei  $W_0 = W_A(T_0) - aT_0$  und  $A_1$  neue Konstanten sind. Die Richardson-Methode liefert  $W_0$ . Es zeigt sich, dass unser Versuch über einen sehr weiten Temperatur-Bereich eine Richardson-Gerade konstanter Steigung liefert, woraus wir folgern können, dass höhere Terme in der Taylor-Entwicklung für uns keine Rolle spielen. Wie hoch der lineare Term dieser Entwicklung ist, ergibt sich nur durch Vergleich von  $W_0$  mit anderen Werten für  $W_A$ .

## Die isotherme Methode

In dieser Methode wird die Abkühlung der Kathode durch den emittierten Strom benutzt, um die Austritts-Arbeit zu bestimmen. Dabei ergibt sich direkt der zur jeweiligen Temperatur gehörige Wert. Bei der Emission nehmen die Elektronen die Energie  $Q = W_A + 2kT_K$  mit, die der thermischen Energie der Kathode entzogen wird. Die mittlere thermische Energie der Elektronen im Strahl  $2kT$  setzt sich zusammen aus jeweils  $\frac{1}{2}kT$  für die beiden Freiheitsgrade der Bewegung parallel zur Austritts-Ebene sowie  $1kT$  für den Freiheitsgrad in Austritts-Richtung. Ursache dafür ist wieder die Wichtung des Boltzmann-Faktors mit  $v_x$ , wie wir sie schon in (8) gesehen haben.

Um den relativ kleinen Abkühl-Effekt durch die Elektronen-Emission ungestört von der thermischen Strahlung messen zu können, heizen wir die Kathode ohne Elektronen-Emission auf eine bestimmte Temperatur, saugen dann über eine positive Anode einen Strom ab und gleichen die Abkühlung durch einen zusätzlichen Heiz-Strom aus, so dass die Kathodentemperatur konstant bleibt. Die zusätzliche Heizleistung kompensiert direkt die Kühlung der Kathode durch die Elektronen-Emission.

$$((I_H + \Delta I_H)^2 - I_H^2)R_H = I_{em} \frac{Q}{e} \text{ mit } Q = W_A + 2kT \quad . \quad (12)$$

Wegen der Kleinheit des Effekts ist  $\Delta I_H \ll I_H$ , so dass wir (12) vereinfacht schreiben können

$$2U_H \Delta I_H = I_{em} \frac{Q}{e} \text{ mit } U_H = I_H R_H \quad . \quad (13)$$

## Zur Messmethode

Der Widerstand des Heizfadens (Wolfram) ist temperaturabhängig. Die Temperaturmessung geschieht über die Messung des Widerstandes mit Hilfe einer Wheatstone-Brücke. Der Eichpunkt für unseren Messaufbau liegt bei  $T = 2400\text{K}$  für einen Heizstrom von  $I_H = 2,1\text{A}$ . Weiterhin ist der spezifische Widerstand von Wolfram in Tabelle 1 gegeben. Diese Abhängigkeit ist soweit linear, dass zwischen zwei Stützstellen lineare Interpolation ausreichend ist.

## Zur Auswertung

Der zusätzliche Heizstrom  $\Delta I_H$  zur Kompensation der Abkühlung der Kathode durch die Elektronen-Emission ist sehr klein. Betrachten wir (13) und berücksichtigen, dass bei einer Heizspannung von  $U_H \approx 5\text{V}$  etwa gilt  $U_H \approx Q/e$ . Dann erkennen wir, dass sich nur  $\Delta I_H \approx I_{em}/2$  ergibt. Damit wird auch der Beitrag zur Heizleistung relevant, den der Emissions-Strom in der Kathode leistet, bevor er emittiert wird.

$$[(I_H + \Delta I_H \pm I_{em}/2)^2 - I_H^2]R_H = I_{em} \frac{Q}{e} \quad . \quad (14)$$

Temperatur K	Spez.Wid. $\mu\Omega\text{cm}$	Temperatur K	Spez.Wid. $\mu\Omega\text{cm}$	Temperatur K	Spez. Wid. $\mu\Omega\text{cm}$
300	5.65	1400	37.19	2500	73.91
400	8.06	1500	40.36	2600	77.49
500	10.56	1600	43.55	2700	81.04
600	13.23	1700	46.78	2800	84.70
700	16.09	1800	50.05	2900	88.33
800	19.00	1900	53.35	3000	92.04
900	21.94	2000	56.67	3100	95.76
1000	24.93	2100	60.06	3200	99.54
1100	27.94	2200	63.48	3300	103.3
1200	30.98	2300	66.91	3400	107.2
1300	34.08	2400	70.39	3500	111.1

Tabelle 1: Spezifischer Widerstand von Wolfram

entsprechend (12). Das Vorzeichen von  $I_{em}$  hängt davon ab, ob der Emissions-Strom parallel oder antiparallel zum Heizstrom in die Kathode eingespeist wird, der Faktor  $\frac{1}{2}$  ergibt sich unter der Annahme, dass pro Längenelement des Kathoden-Drahtes gleich viel Strom emittiert wird. Wird der Emissions-Strom  $I_{em}$  zu gleichen Teilen von beiden Enden der Kathode her eingespeist, so entfällt in (14) der Term mit  $I_{em}$ . Jede Abweichung von dieser Aufteilung führt zu einem systematischen Fehler beim Bestimmen der Austritts-Arbeit.

## Aufgaben:

1. Machen Sie sich den Schaltplan der Versuchsanordnung klar. Erklären Sie insbesondere die Funktion der einzelnen Schalter und Potenziometer.
2. Messung der Emissionsstrom – Spannungs – Kennlinie der Diode für eine Heizspannung zwischen 5,2 bis 5,6 Volt (Heizstrom notieren!).

Auswertung:

- a) Zeichnen Sie anhand Ihrer Messwerte die Dioden-Kennlinie und kennzeichnen Sie deren verschiedenen Bereiche.
  - b) Berechnen Sie die Kontaktspannung  $U_K$  aus den Messwerten mit extrem kleinem Emissions-Strom sowie dem Sättigungs-Strom.
  - c) Überprüfen Sie aus der doppelt-logarithmischen Darstellung das  $I_{em} \sim (U - U_K)^{3/2}$ -Gesetz.
3. Bestimmen Sie die Austritts-Arbeit nach der Richardson-Methode.
  4. Bestimmen Sie bei  $U_H = 5.0\text{V} ; 5.2\text{V} ; 5.4\text{V} ; 5.6\text{V} ; 5.7\text{V}$  und  $5.8\text{V}$  die Austritts-Arbeit nach der isothermen Methode. Regeln Sie die Potenziometer jeweils dreimal ein. Zeigen Sie, dass  $\Delta I_H \approx -I_H^2 \Delta R_1 / U_{ges}$  gilt. Dabei ist  $U_{ges}$  die vom Netzgerät gelieferte Spannung und  $R_1$  der Widerstand resultierend aus der Parallelschaltung des  $1\Omega$ -Widerstands mit dem  $25\Omega$ -Potenziometer.

**Grenzdaten der Röhre:**  $I_H \leq 2.2\text{A}$  ; **Anodenverlust-Leistung**  $P_A \leq 2\text{W}$ .

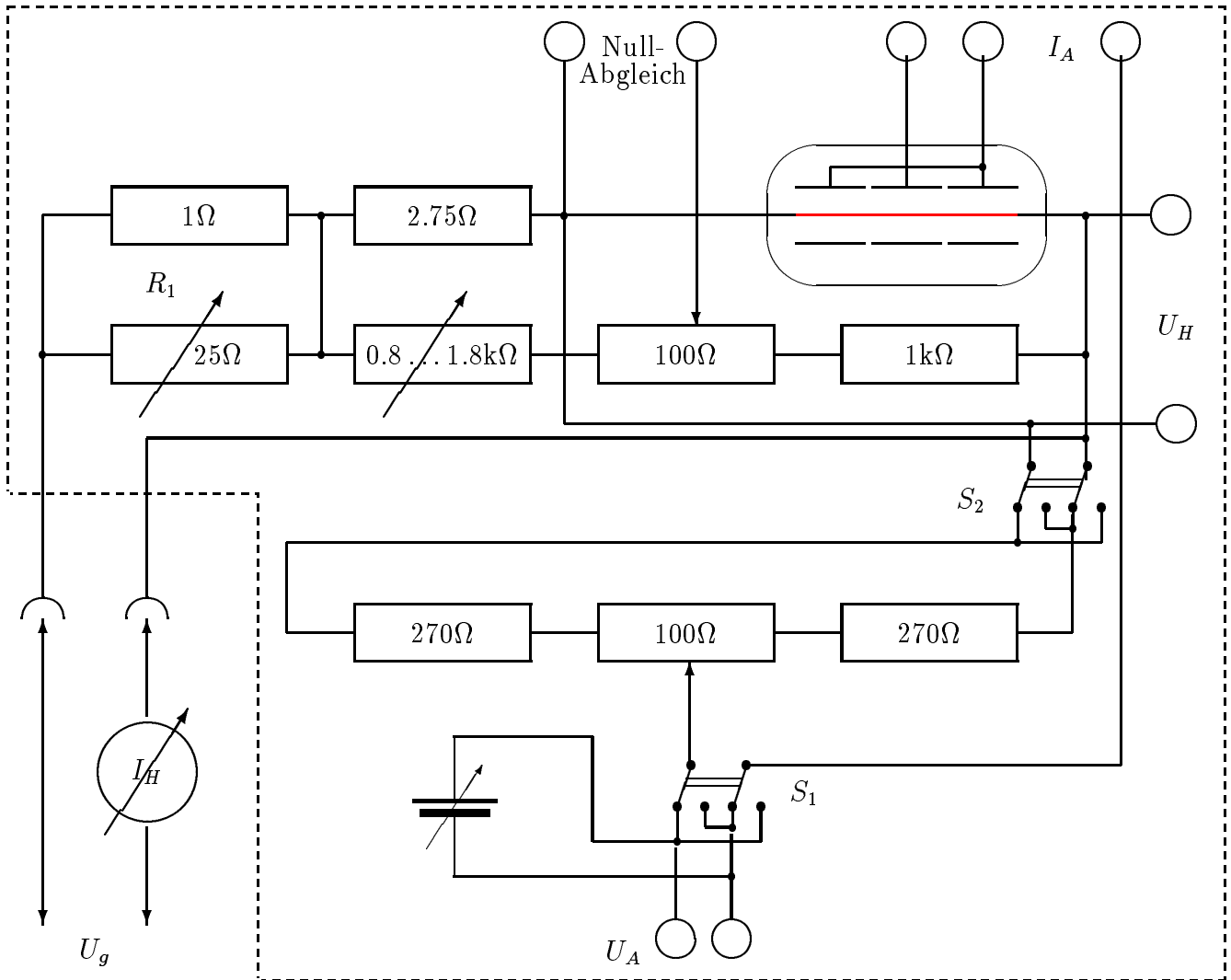


Abb. 4: **Schaltplan:** Der Wechselschalter  $S_1$  polt die Anoden-Spannung um, und  $S_2$  dient zum Symmetrisieren des  $100\Omega$  -Potenziometers für eine symmetrische Einspeisung des Emissions-Stroms in die Kathode.  $R_1$  stellt  $\Delta I_H$  ein für Aufg.4.  $U_g$  stellt eine externe, regelbare Spannungsquelle für maximal 15V, 5A dar. An den übrigen Buchsen sind jeweils passende Messgeräte anzuschließen.