

## Versuch 3.14:

# Resonanzverhalten Nichtlinearer Oszillatoren

## Vorbereitung:

Resonanz, Hysterese, nichtlineare Dynamik, Bifurkationen, Chaos, Attraktoren, Lyapunov Exponenten, fraktale Dimensionen

## Literatur:

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| Schuster, H.G.                | Deterministic Chaos   |
| Lauterborn/Meyer-Ilse         | Chaos, in: Physik in unserer Zeit, 17 (1986) S. 177ff und dort zitierte Literatur |
| Thompson, J.M., Steward, H.B. | Nonlinear Dynamics and Chaos  |
| Baker, G.L. Gollup, J.P.      | Chaotic Dynamics  |
| Guckenheimer, J. Holmes, P.   | Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of vector fields        |

## Einführung

Das Resonanzverhalten eines nichtlinearen Schwingkreises wird untersucht. Hierzu werden Resonanzkurven vermessen, Attraktoren dargestellt und Amplituden / Frequenz-Phasendiagramme angefertigt, um die Lage der unterschiedlichen Resonanzen im Parameterraum darzustellen.

### Der Serienresonanzkreis

Vermessen wird das Verhalten eines nichtlinearen Serienresonanzkreises, der aus einem Widerstand  $R = 200\Omega$ , einer Induktivität  $L = 6.4mH$  und einer spannungsabhängigen Kapazitätsdiode  $C(U)$  (Typ 1N4007) aufgebaut wird.

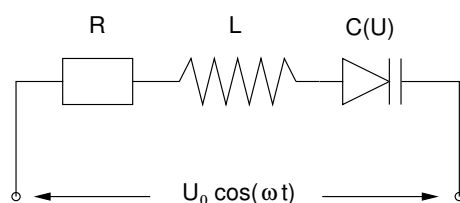


Abbildung 1: *Der nichtlineare Serienresonanzkreis*

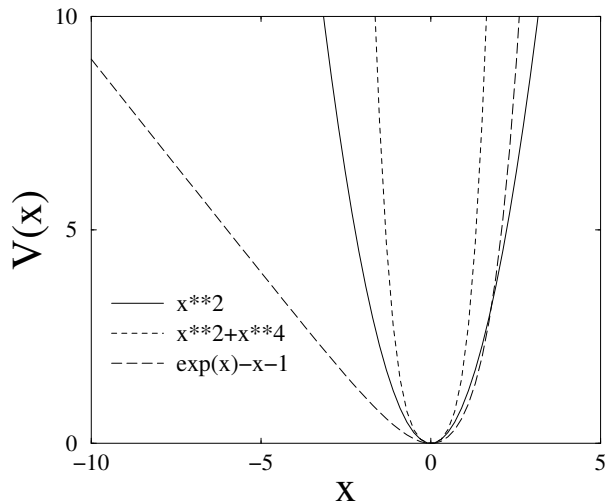


Abbildung 2: *Potentiale verschiedener Oszillatortypen*

sehen nun einfache nichtlineare Differentialgleichungen aus, die als Modell für bestimmte physikalische Versuche entwickelt wurden?

$\ddot{x} + d\dot{x} + x = a \cos(\omega t)$	angetriebener, linearer Oszillator mit Dämpfung
$\ddot{x} + d\dot{x} + x + x^3 = a \cos(\omega t)$	Duffing Dgl.
$\ddot{x} + d\dot{x} + e^x - 1 = a \cos(\omega t)$	Toda Dgl.
$\ddot{x} + d(x^2 - 1)\dot{x} = a \cos(\omega t)$	Van-der-Pol Dgl.

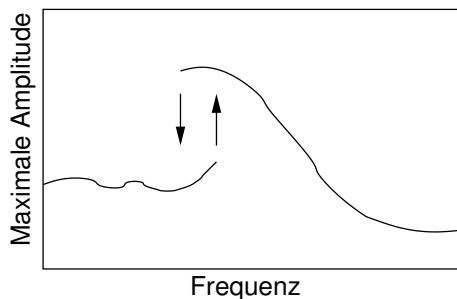


Abbildung 3: *Hysterese eines "weichen" Oszillators*

Das Maximum zu niedrigeren Frequenzen hin, bei "harten" umgekehrt. Der hier untersuchte Schwingkreis läßt sich gut durch die Toda Gleichung beschreiben, die ein asymmetrisches, weiches Potential hat.

Der wichtige Effekt der Hysterese wird in der nächsten Skizze deutlich. Bei Veränderung eines Parameters (hier: der Frequenz) ist es nicht mehr egal, von welcher Seite im Parameterraum man sich der Hauptresonanz nähert. Es sind im Hysteresebereich 2 stabile Schwingungsformen möglich. Außerdem wird das Schwingungsmaximum erheblich verschoben. Wohin die Hauptresonanz überhängt, hängt vom Potential des jeweiligen Oszillators ab. Ist es "weicher" als das des linearen Oszillators, verschiebt sich das Maximum

## Grundlagen der Theorie dynamischer Systeme

In diesem Abschnitt werden einige Grundlagen der Theorie der dynamischen Systeme vorgestellt. Insbesondere sollen die Methoden, diese Theorie auf experimentelle Schwingungssignale anzuwenden, dargestellt und erklärt werden.

Die Menge aller Zustände, in denen sich ein System befinden kann, definiert den Phasenraum dieses Systems. Im Allgemeinen wird dies eine Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  sein, oft eine Teil-

Schwingkreise zeichnen sich durch ihr Resonanzverhalten aus. Die Amplitude des linearen Schwingkreises zeigt in Abhängigkeit von einer anregenden Sinusschwingung ein Resonanzmaximum, dessen Lage und Form zusätzlich von der Dämpfung beeinflusst wird. Bei der Einführung einer Nichtlinearität verändert sich das Verhalten dramatisch. Das Auftreten von Oberwellen (Harmonischen) und Hysterese sind die ersten bekannten Phänomene. Weitergehende Untersuchungen zeigen, daß auch subharmonische Frequenzen und sogar aperiodisches Verhalten auftreten kann, obwohl der einfache nichtlineare Oszillator periodisch angeregt wird. Wie

menge des  $\mathbb{R}^n$ . Die Dynamik des Systems läßt sich durch das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}$$

beschreiben.  $v(x_1, \dots, x_n)$  wird das Vektorfeld des dynamischen Systems genannt. Das Vektorfeld  $v$  erzeugt einen Fluß  $\phi$  auf dem Phasenraum  $\mathcal{M}$ , der die zeitliche Entwicklung der verschiedenen Zustände  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  des dynamischen Systems beschreibt.

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M} \\ (\mathbf{x}, t) &\mapsto \phi(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

Als Flußabbildung  $\phi^t := \phi|_{\mathcal{M} \times \{t\}}$  wird die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi^t : \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ \mathbf{x} &\mapsto \phi^t(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

bezeichnet. Wenn  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist, dann repräsentiert  $\phi^t(\mathbf{x})$  den Zustand zur Zeit  $t$ . Die Bahn, die ausgehend von  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  durchlaufen wird, heißt Trajektorie oder Orbit  $\gamma(\mathbf{x})$  und ist definiert als

$$\gamma(\mathbf{x}) = \{\phi^t(\mathbf{x}) : t \in \mathbb{R}\}$$

Häufig zeigen Trajektorien dynamischer Systeme, die von einem Punkt  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  ausgehen, ein transientes Verhalten (Einschwingvorgang), dem asymptotisch ein Schwingungsendzustand, ein sogenannter Attraktor, folgt. Als Attraktor  $\mathcal{A}$  wird nun diejenige Grenzmenge bezeichnet, auf die eine Menge von verschiedenen Anfangswerten  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  für  $t \rightarrow \infty$  zulaufen, d.h. wenn gilt:

- i) Die Menge  $\mathcal{A}$  ist invariant unter dem Fluß, d.h.  $\phi^t(\mathbf{x}) \in \mathcal{A}$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$  und  $t \in \mathbb{R}^+$ ,
- ii)  $\mathcal{A}$  hat eine anziehende Umgebung  $\mathcal{U} \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ , so daß  $\phi^t(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{A}$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$  und  $t \rightarrow \infty$ .
- iii)  $\mathcal{A}$  kann nicht in mehrere verschiedene invariante Teile aufgespalten werden.

Attraktoren können zum einen geschlossene Kurven, sogenannte periodische Orbits sein, für die gilt:

Sei  $\mathbf{x}$  ein Punkt auf dem Attraktor  $\mathcal{A}$ , dann gibt es eine Zeit  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , so daß gilt

$$\begin{aligned} \phi^{t_0}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \\ \text{aber } \phi^t(\mathbf{x}) &\neq \mathbf{x} \quad \text{für alle } 0 < t < t_0. \end{aligned}$$

Zum anderen gibt es Attraktoren, die eine sehr komplizierte, fraktale Struktur haben. Diese sogenannten seltsamen Attraktoren sind durch verschiedene Größen charakterisierbar, von denen einige hier noch ausführlicher behandelt werden.

## Fraktale Dimensionen

Die Dimension der Attraktoren hat für die Phasenraumanalyse von Zeitreihen von Observablen eine entscheidende Bedeutung, da sie Auskunft über die Anzahl der systeminhärenten unabhängigen "Moden" gibt. Seltsame Attraktoren sind typischerweise durch eine "fraktale" Dimension charakterisiert. Ihre Größe ist kleiner als die Anzahl der Freiheitsgrade, in denen das System schwingt.

Im Laufe der Zeit wurden verschiedene Methoden entwickelt, fraktale Dimensionen zu bestimmen, wobei man zu Definitionen verschiedener Dimensionsgrößen kam, deren Werte für "typische" Attraktoren meist gleich sind. Die Bedeutung und Definition einiger dieser Größen soll nun vorgestellt werden, wobei besonders auf praktische Schwierigkeiten bei der Bestimmung aus experimentellen Daten eingegangen wird.

### Hausdorff-Dimension

Das eigentliche Ziel bei der Bestimmung einer fraktalen Dimension ist, Aussagen über skaleninvariante Eigenschaften eines Attraktors machen zu können. Dabei wird der Attraktor  $\mathcal{A}$  im  $m$ -dimensionalen Phasenraum  $\mathcal{M}$  von  $m$ -dimensionalen Kuben der variablen Kantenlänge  $r_k \leq r$  überdeckt. Die Grundidee basiert auf der Einführung einer Funktion  $L_d(r)$ , die wie folgt definiert wird:

$$L_d(r) = \inf \sum_k r_k^d$$

mit  $d \geq 0$ .  $L_d(r)$  stellt das Infimum der Summen über alle möglichen Überdeckungen des Attraktors mit Kuben mit der Kantenlänge  $r_k \leq r$  dar.

HAUSDORFF zeigte, daß es einen kritischen Wert  $d = d_H$  gibt, so daß im Grenzwert  $r$  gegen Null gilt:

$$\begin{aligned} d < d_H &\rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} L_d(r) = \infty \\ d > d_H &\rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} L_d(r) = 0 \end{aligned}$$

Für  $d = d_H$  nimmt  $\lim_{r \rightarrow 0} L(r)$  einen positiven, finiten Wert an.  $d_H$  wird HAUSDORFF-Dimension genannt. Wenn man eine Überdeckung mit Kuben konstanter Kantenlänge  $r_k = r$  betrachtet, kommt man zu einer sehr verwandten Dimension, der Kapazität  $d_c$ , die auf ähnliche Weise definiert ist:

$$L_d(r) = M(r) r^d$$

und

$$\begin{aligned} d < d_c &\rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} L_d(r) = \infty \\ d > d_c &\rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} L_d(r) = 0 \end{aligned}$$

$M(r)$  ist die minimale Anzahl der zu einer vollständigen Überdeckung notwendigen Kuben. Es gilt  $d_c \geq d_H$ , typischerweise jedoch die Gleichheit.

Eine numerische Realisierung, diese beiden fraktalen Dimensionen zu bestimmen, wird auch "box-counting" genannt. Sie sind numerisch sehr ineffektiv und wegen des enormen Speicherplatzbedarfes nur einsetzbar bei Dimensionen des Phasenraumes  $\leq 2$ .

## Die Lyapunov-Exponenten

Eine weitere Eigenschaft seltsamer Attraktoren ist neben ihrer fraktalen Dimension die sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Jede noch so kleine Änderung der Startwerte wird exponentiell verstärkt und läßt die Bewegung auf dem Attraktor nach kürzester Zeit völlig anders verlaufen. Dieser Vorgang kann auch so verstanden werden, daß das System im Laufe der Zeit immer mehr Information über seine genauen Anfangskoordinaten produziert und meßbar macht. Diese Informationsproduktion wird durch die Informationsproduktionsrate oder metrische Entropie  $K$  bestimmt. Die Information über die Anfangskoordinaten zur Zeit  $t$  ist gleich

$$I(t) = I(t_0) + K(t - t_0) \quad .$$

Bei chaotischen Systemen ist die Entropie  $K > 0$ , bei nicht chaotischen ist  $K \leq 0$ , d.h. Information wird vernichtet bzw. konserviert. Die Lyapunov- (charakteristischen) Exponenten beschreiben nun das zeitgemittelte Expansions- bzw. Kontraktionsverhalten in verschiedenen Richtungen des lokalen Flusses und damit die Evolution, d.h. das Zeitverhalten, benachbarter Zustände des physikalischen Systems. Die Bestimmung der Lyapunov-Exponenten aus Zeitreihen einer Observablen gibt entscheidende Hinweise zur Charakterisierung des Systems.

Zur Bestimmung der Lyapunov-Exponenten betrachtet man die Evolution eng benachbarter Zustände in einer infinitesimalen Kugel von Anfangsbedingungen. Diese Kugel wird durch die linearisierte Flußabbildung  $D\phi^t$  deformiert und gedreht.

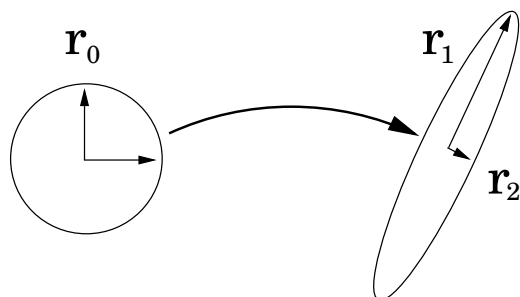


Abbildung 4: Eine Menge von Anfangsbedingungen wird durch ein dynamisches System abgebildet (hier: ein positiver und ein negativer Lyapunov-Exponent)

Die Lyapunov-Exponenten bestimmen sich zu

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{r_i(t)}{r_0} \quad .$$

Je nach Vorzeichen ergeben sich folgende Bedeutungen:

$\lambda > 0$  exponentielle Expansion,  $\lambda = 0$  Flußrichtung,  $\lambda < 0$  exponentielle Kontraktion. Da es sich bei den betrachteten nichtlinearen dynamischen Systemen um dissipative Systeme handelt, gilt, daß die Summe aller Exponenten des  $n$ -dimensionalen Phasenraums kleiner als Null ist. Die Summe aller positiven Lyapunov-Exponenten ist gleich der Entropie  $K$ .

# Versuchsdurchführung

- 0) Erklären Sie die unter dem Kapitel Vorbereitung genannten Begriffe.
- 1) Bauen Sie den Schwingkreis auf dem Steckbrett auf. Skizzieren Sie den Versuchsaufbau vorher.
- 2) Vermessen Sie die Diodenspannung  $U_C(t)$  in Abhängigkeit von der anregenden Sinusspannung  $U_A(t)$ . Fertigen Sie hierzu Resonanzkurven an, in denen Sie die maximale Amplitude der Diodenspannung  $U_C(t)$  über der Anregungsfrequenz auftragen. Erstellen Sie Diagramme für 2 verschiedene Anregungsspannungen  $U_A(t)$ , von der "linearen" Resonanz bis zur ausgebildeten Hysterese ( $100mV_{SS}$ ,  $1V_{SS}$ ;  $50-550kHz$ ). (Nur an der Hysterese mehrere Meßpunkte nehmen, im sonstigen Frequenzbereich kann interpoliert werden. Tastkopfeinstellung "\*10").
- 3) Untersuchen Sie einige der auftretenden Schwingungstypen auf dem PC. Dargestellt wird die Anregungsspannung  $U_A(t)$  und der Strom  $I(t)$ . Betrachten Sie parallel dazu die Phasenraumdarstellung  $I(t)$  gegen  $U_A(t)$  auf dem Oszilloskop. Hierzu Spannung über Widerstand ( $\sim I(t)$ ) abgreifen (Achtung Polarität, Tastkopfeinstellung "\*1"). Plotten Sie  $I(t)$  und das Leistungsspektrum (FFT). Skizzieren Sie die Attraktoren. (Anregungsfrequenz ca. 95 kHz, Anregungsamplitude variabel).
- 4) Stellen Sie eine Resonanzkurve und ein Bifurkationsdiagramm bei verschiedenen Anregungsamplituden (linear  $\rightarrow$  nichtlinear) dar. Eichung der Skala. Versuchsskizze. Erklärung.
  - a) Resonanzkurve  
Frequenzgenerator auf Frequenzmodulations-Betrieb, Modulations-Spannung des Generators (sweep hinten am Gerät) auf X-Achse des Oszilloskops,  $I(t)$  auf Y-Eingang, X-Y Einstellung.
  - b) Bifurkationsdiagramm  
Das zur Anregung synchrone Rechtecksignal des Frequenzgenerators auf Puls-generator geben. Puls-Ausgangssignal auf Z-Eingang des Oszilloskops (hinten am Gerät).
- 5) Erstellen Sie ein Phasendiagramm, in dem Sie mit Hilfe der Darstellung der Bifurkationsdiagramme die Periode in Abhängigkeit von der Amplitude und Frequenz der anregenden Sinusspannung auftragen.  
Frequenzachse:  $50 - 550Hz$   
Amplitudenachse:  $0 - 20V_{SS}$   
Messen Sie in einer Richtung auf der Frequenzachse und verändern die Amplitude in  $1V$ -Schritten. Verbinden Sie die Bifurkationslinien. Normieren Sie die Frequenzachse zusätzlich in Einheiten der linearen Eigenfrequenz  $f_0$ .

## Zur Ausarbeitung

- Erläutern Sie die unter dem Kapitel Vorbereitung genannten Begriffe und gehen Sie dabei auf die im Versuch gewonnen Erkenntnisse ein.
- Zu Aufgabe 1: Beschreiben Sie den Versuchsaufbau.
- Zu Aufgabe 2: Tragen Sie die Graphen in eine Zeichnung (mit unterschiedlicher Skalierung) ein.
- Zu Aufgabe 3: Stellen Sie die einzelnen Plots übersichtlich zusammen, beschreiben und kommentieren Sie sie.
- Zu Aufgabe 4: Beschreiben und skizzieren Sie den Versuchsaufbau, insbesondere die messtechnische Darstellung der Diagramme. Skizzieren Sie die Resultate. Erläutern Sie die theoretischen Hintergründe.
- Zu Aufgabe 5: Fertigen Sie eine übersichtliche Reinzeichnung aus den Ergebnissen an. Verbinden Sie die einzelnen Bifurkationspunkte zu Bifurkationslinien. Tragen Sie in den entstehenden Gebieten einer bestimmten Periode im  $U_A/f$  Parameter-raum jeweils nur eine Zahl ein, die der jeweiligen Periode. Kommentieren Sie das entstandene Phasendiagramm. Was fällt Ihnen besonders auf? Vergleichen Sie auch mit den unter Aufgabe 3) erhaltenen Ergebnissen und tragen Sie die gemessenen Punkte in die Zeichnung ein.

Zu dem Versuch gehören:

- 1 Sinusgenerator
- 1 Oszilloskop
- 1 Pulsgenerator
- 1 PC mit AD Wandler
- 1 Drucker
- 1 Steckbrett
- 1 Widerstand, Induktivität, Kapazitätsdiode
- div. Kabel